MATEM. PER L'ECONOMIA 4^a LEZ.

14/10/2025

OTTIMIZ. VINCOLATA CON VINCOLI DI UGUAGLIANZA (C.N.S.)

$$\text{MAX/MIN } f(x_1, \dots, x_n)$$

$$g_1(\underline{x}) = b_1$$

$$g_2(\underline{x}) = b_2 \quad \dots$$

I METODO : "FURBO"

II METODO : TEORICO

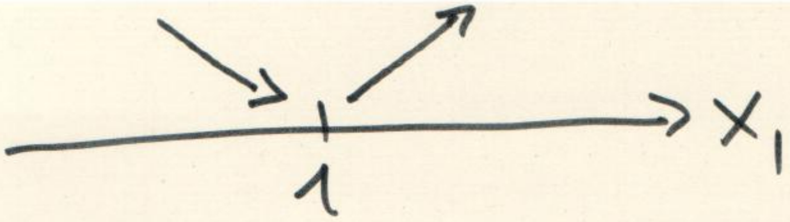
ES. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 - 8x_1$

vincolo $x_1 - x_2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = x_1$ bisettrice 1° e 3° q.

$$f(x_1, x_1) = x_1^2 + 2x_1^2 + x_1^2 - 8x_1 = 4x_1^2 - 8x_1$$

$\Rightarrow f' = 8x_1 - 8 \geq 0 \quad x_1 \geq 1$



$x_1 = 1$
$x_2 = 1$ p. di MIN. REL.

MA NON È SEMPRE POSSIBILE RICAVARE $x_2 = \varphi(x_1)$ o $x_1 = \psi(x_2)$
QUINDI BISOGNA COSTRUIRE LA
FUNZIONE LAGRANGIANA

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \underline{\lambda}^T \left(\underline{b} - \underline{g}(\underline{x})\right)$$

↑ MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE
CIASCUNO ASSOCIATO AI VINCOLI

SI CALCOLA IL VETTORE

$$\nabla L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = \underline{0}$$

E SI TROVANO I P. CRITICI DI L

n VARIABILI
m VINCOLI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

BISOGNA POI COSTRUIRE LA MATRICE <u>HESSIANA ORLATA</u>:

m×m

$$\bar{H}(\underline{x},\underline{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}^{*} \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}^{*} & H_L \end{bmatrix}$$

M×M

* RETTANGOLARI

<u>ES.</u> MAX/MIN $f(x_1, x_2) = \dots$

vincolo $x_1 - x_2 = 0$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 - 8x_1 + \lambda(0 - x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 8 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + x_1 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

è il vincolo

$$\begin{array}{l} 3^\circ \\ 1^\circ \\ 2^\circ \end{array}\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1 + x_1 - 8 - \lambda = 0 \\ 4x_1 + x_1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -5x_1 \end{cases}$$

$$3x_1 - 8 + 5x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = 1 \\ \lambda = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ \lambda = -5 \end{cases}$$

P. CRITICO DELLA L

$$\overline{H}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad 3\times 3$$

$1^\circ = 0$ SEMPRE

$2^\circ = -1 < 0$ SEMPRE

$3^\circ = -1(4+1) - 1(1+2) = -8 < 0$

- SE DET $\overline{H}$ è $< 0 \Rightarrow$ MIN. R.
- SE DET $\overline{H}$ è $> 0 \Rightarrow$ MAX. R.

CONDIZIONI SUFFICIENTI

ES. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}$

vincolo $x_1^2 + x_2^2 - 6x_2 = 0$

$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 6x_2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2 - 2\lambda x_2 + 6\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x_1^2 + x_2^2 - 6x_2) = 0 \end{cases}$$

$x_1(1-\lambda) = 0 \quad \begin{cases} \to x_1 = 0 \\ \to \lambda = 1 \end{cases}$

B $\begin{cases} \lambda = 1 \\ x_2 - 2x_2 + 6 = \\ x_1^2 + x_2^2 - 6x_2 = \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda = 1 \\ x_2 = 6 \\ x_1^2 = 0 \quad x_1 = \end{cases}$

A $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2\lambda x_2 + 6\lambda = 0 \\ x_2^2 - 6x_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2(x_2 - 6) = 0 \\ x_2 - 2\lambda x_2 + 6\lambda = 0 \end{cases} \quad x_2(x_2-6)=0 \begin{cases} \to x_2 = 0 \\ \to x_2 = 6 \end{cases}$

A1 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$ A2 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \\ 6 - 12\lambda + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$

QUINDI

$(0,0,0)$ $(0,6,1)$ P. CRITICI DI L

$$\overline{H}(x_1,x_2,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2-6 \\ 2x_1 & 2-2\lambda & 0 \\ 2x_2-6 & 0 & 1-2\lambda \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\overline{H}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \overline{H} = -6(12) < 0 \Rightarrow (0,0)$ MIN.P

$$\overline{H}(0,6,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det \overline{H} = 0$ nulla si può dire!

IL VINCOLO È UNA CIRC. DI CENTRO $(0,3)$ E RAGGIO 3

$\Rightarrow$ INSIEME CHIUSO E LIMITATO

$\Rightarrow$ TEO DI WEIERSTRASS

$\Rightarrow$ MIN $(0,0)$ MAX $(0,6)$

ES. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

vincolo $x_1 + 2x_2 + x_3 - 3 = 0$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda(x_1 + 2x_2 + x_3 - 3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 1 \cdot \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 \cdot \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - \text{[redacted]} \cdot \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x_1 + 2x_2 + x_3 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 2x_1 \\ \lambda = x_2 \\ \lambda = \frac{2}{2} x_3 \\ \frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{1}{2}\lambda - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{6\lambda}{2} = 3$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right)$ P. CRITICO

$$\overline{H}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\overline{H}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right) = \nearrow$$

$1^\circ = 0$ SEMPRE

$2^\circ = -1$ "

$3^\circ = 2(-4) + 2(-1) = -10 < 0$

$$4^\circ = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\left(-2(-2)\right) + 2\left[-1(2) + 2(-4)\right] =$$

$$= -4 + 2(-10) = -24 < 0$$

3° e 4° $< 0 \implies$ MIN. R.

POTEVO FARE IL METODO "FURBO"?
SÌ

ES. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$

vincoli $x_1^2 - x_2^2 = 1$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

(POSSO FARE IL METODO "FURBO"? SÌ, RICAVO x_3 DAL 2° VINCOLO....)

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1 (1 - x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2 (2 - x_1 - x_2 - x_3)$$

SISTEMA 5×5 E $\overline{H}$ 5×5 ......

pag. 149

FACCIO IL METODO "FURBO"

$x_3 = 2 - x_1 - x_2$

$f(x_1, x_2, \downarrow) = x_1^2 - x_2^2 + (2 - x_1 - x_2)^2$

$x_1^2 - x_2^2 = 1$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda (1 - x_1^2 + x_2^2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2(2 - x_1 - x_2)(-1) + \lambda(-2x_1) = 0 \\ -2x_2 + 2(2 - x_1 - x_2)(-1) + \lambda(2x_2) = 0 \\ 1 - x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2 + x_1 + x_2 - \lambda x_1 = 0 \\ -\cancel{x_2} - 2 + x_1 + \cancel{x_2} + \lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 = 2 \longrightarrow x_1 = 2 - \lambda x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(2 - \lambda x_2) - \lambda(2 - \lambda x_2) + x_2 = 2 \\ x_1 = \dots \\ 4 - 4\lambda x_2 + \lambda^2 x_2^2 - x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 2\lambda x_2 - 2\lambda + \lambda^2 x_2 + x_2 = 2 \\ 4 - 4\lambda x_2 + \lambda^2 x_2 - x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\lambda x_2 + \lambda^2 x_2 + x_2 - 2\lambda = -2 \\ -1 \quad -4\lambda x_2 + \lambda^2 x_2 - x_2^2 = -3 \end{cases}$$

$$2\lambda x_2 \quad // \quad + x_2^2 + x_2 - 2\lambda = 1$$

EQ. DI 2° GRADO IN x_2

" " 1° " " λ

MEGLIO RICAVARE

$$\lambda = \frac{1 - x_2^2 - x_2}{2x_2 - 2}$$

E SOSTITUIRE NELLA 2^a EQ.

$$-4\,\frac{1 - x_2^2 - x_2}{2x_2 - 2}\,x_2 + (\quad)^2 x_2 - x_2^2 = -3$$

RACCOLGO x_2

$$x_2\left[\left(\frac{-4 + 4x_2^2 + 4x_2}{2(x_2 - 1)}\right) + (\quad)^2 - x_2\right] = -3$$

TROPPI CALCOLI !!!

. . . . . .

305 $f(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2^2)$

v. $x_1^2 + x_2^2 = 5$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_1 x_2^2 + \lambda(5 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2^2 - 2x_1\lambda = 0 \\ 2x_1 x_2 - 2x_2\lambda = 0 \\ 5 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(x_1 - \lambda) = 0 \\ \\ \end{cases}$$

$$A \begin{cases} x_2 = 0 \\ \cancel{2}x_1 - \cancel{2}x_1\lambda = 0 \\ 5 = x_1^2 \end{cases} \quad B \begin{cases} x_1 = \lambda \\ \\ \end{cases}$$

$x_1 = \pm\sqrt{5}$ $\quad \lambda = 1$

12

$(\pm\sqrt{5}, 0, 1)$

$$B\begin{cases} x_1 = \lambda \\ 2x_1 + x_2^2 - 2\lambda x_1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = x_1 \\ 2x_1 + x_2^2 - 2x_1^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = x_1 \\ x_2^2 = 5 - x_1^2 \quad (3^a) \\ 2x_1 + 5 - x_1^2 - 2x_1^2 = 0 \end{cases}$$

$$-3x_1^2 + 2x_1 + 5 = 0$$

$$3x_1^2 - 2x_1 - 5 = 0$$

$$(x_1)_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

$x_1 = \frac{5}{3}$ $\qquad$ $x_1 = -1$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} \\ \lambda = x_1 = \frac{5}{3} \\ x_2^2 = 5 - x_1^2 = \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 \\ \lambda = -1 \\ x_2^2 = 5 - x_1^2 \end{cases}$$

$$= 5 - \frac{25}{9} = \frac{20}{9} \qquad x_2 = \pm 2$$

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{20}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\left(\frac{5}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{5}{3}\right) \qquad 6 \text{ p. crit.}$$

$$(-1, \pm 2, -1)$$

$$(\pm\sqrt{5}, 0, 1)$$

$$\overline{H}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2-2\lambda & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_2 & 2x_1 - 2\lambda \end{bmatrix}$$