

"Alberto Alberto, tu non combinerai mai niente nella vita!..."

L'insegnante di Matematica al giovane liceale Albert Einstein (forse troppo bello per essere vero...)

UN'INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

Queste sono le schede viste al Laboratorio della Summer School, ritoccate, risolte e commentate. Ne ho aggiunta una sulla velocità della luce come limite e sulla casualità, che mi sembra interessante.

Non ho inventato niente, ho semplicemente rielaborato i materiali di un libretto fantastico che vi consiglio:

Daniel F. Styer - Capire davvero la relatività. Alla scoperta della teoria di Einstein. Zanichelli Chiavi di Lettura 2016

E' un libro elementare negli strumenti usati e molto tosto nei ragionamenti fatti. Lo consiglio a chi a trovato il laboratorio interessante.

Io mi sono divertito a ragionare con voi, come sempre discutere con gente nuova dell'argomento ma curiosa - e voi lo eravate - è il modo migliore per chiarirsi le idee anche per uno come me, che avrei dovuto sapere di cosa si parlava.

Purtroppo per ragioni di tempo e di tecniche disponibili abbiamo dovuto saltare a piè pari molte cose interessanti. in particolare tutta la *dinamica relativista* (vi sarete probabilmente resi conto che ci siamo limitati alla *cinematica* della relatività).

Se la lucina vi si è accesa, avrete occasione, nel corso dei vostri studi, da soli o con altri , di approfondire.

Nel frattempo sentitevi liberi di chiedermi qualunque cosa al mio email ippolito.perlasca@tin.it; non garantisco che saprò rispondere, ma posso provarci e darvi qualche ulteriore indicazione di lettura.

Mi fate piacere se userete l'email anche per esprimere critiche, commenti, idee per futuri sviluppi o semplicemente per segnalarmi errori.

Ciao a tutti e Grazie

Bergamo, 11 settembre 2016

Ippolito Perlasca

SCHEDA 1

Si parte!

Provate a commentare le affermazioni:

Venezia dista 300 km

L'auto ha una velocità di 80 km/h

Le trovate sensate? Dicono tutto quello che c'è da dire?

Beh, la prima appare subito sciocca: 300 km da dove? Ci vuole un punto di riferimento, o meglio un *sistema* di riferimento, che permetta di specificare anche le direzioni 300 km a Est da Bergamo.

La seconda appare più sensata, o per lo meno il più delle volte non ci sarebbero dubbi su cosa significa. Se però guardassimo l'auto da un treno in corsa...

SCHEDA 2

Anche le velocità dipendono dal riferimento

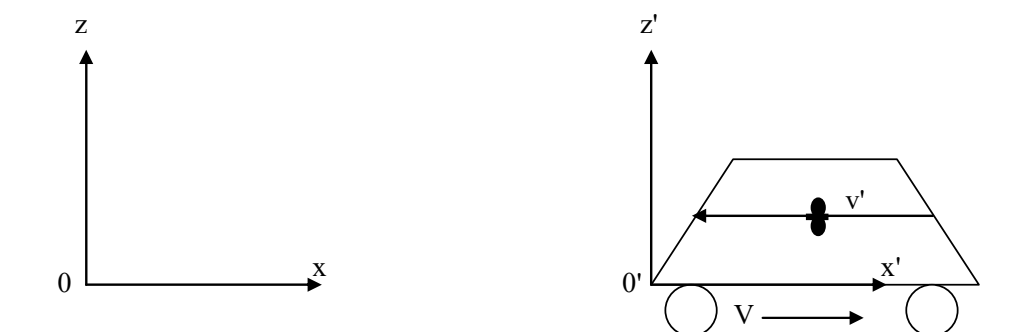
In un'auto che va a 72 km/h un moscerino vola in 1 s dal parabrezza al lunotto posteriore, che dista 2 m.

A che velocità vola il moscerino?

E' una domanda ben posta?

Qui vien subito da rispondere che il moscerino vola a 2 m/s *rispetto all'auto*, ma se lo guardiamo dalla terra vola a 10 ms (perché va in direzione opposta a quella dell'auto e 72 km/h = 20 m/s.).

Per fare le cose per bene fissiamo due sistemi di riferimento, che rappresentiamo come due paia di assi cartesiani ortogonali¹, uno S solidale con la Terra, l'altro S' con l'auto. S' (cioè la sua origine) si muove di velocità V nel sistema S , lungo il senso positivo delle x . Cioè i due sistemi si muovono tra di loro di moto puramente traslatorio "scivolando" lungo gli assi delle ascisse. Potremmo immaginare movimenti più complicati (magari rotazioni), ma qui non ci serve. I due sistemi hanno ciascuno un orologio per misurare il tempo e (supponiamo) coincidono a $t=0$.



Se chiamiamo x' l'ascissa di un punto (un oggetto) in S' , ad esempio il nostro moscerino, al tempo t l'ascissa dello stesso oggetto in S è $x = x' + Vt$, perché nel frattempo l'origine $0'$ di S' si è allontanata di Vt dall'origine O di S .

Se consideriamo le *variazioni* in un intervallo di tempo Δt , supponendo V costante, otteniamo $\Delta x = \Delta x' + V\Delta t$ che, dividendo per Δt , dà:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} + V$$

Ma $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ è la velocità del moscerino nel sistema Terra S , $v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t}$ quella del moscerino nel sistema auto S' (meglio, le uniche componenti non nulle, quelle lungo gli assi x e x'). Per cui:

$$v = -2 \text{ m/s} + 20 \text{ m/s} = 18 \text{ m/s}$$

Ci si era già arrivati senza rigiri, ma è meglio fissare le idee per dopo.

¹ Nello spazio ci vorrebbero tre assi, ma qui disegniamo tutto su un foglio di carta, ed è più semplice ridursi a due dimensioni.

SCHEDA 3

La composizione delle velocità

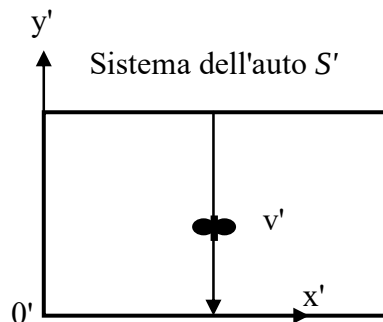
Questa volta il moscerino vola dal finestrino destro a quello sinistro (distanza 1 m) in 0.5 s. L'auto va sempre a 72 km/h nel riferimento della Terra.

Qual è la velocità del moscerino nel riferimento della Terra?

Basta questo valore a caratterizzare il suo moto in tale riferimento?

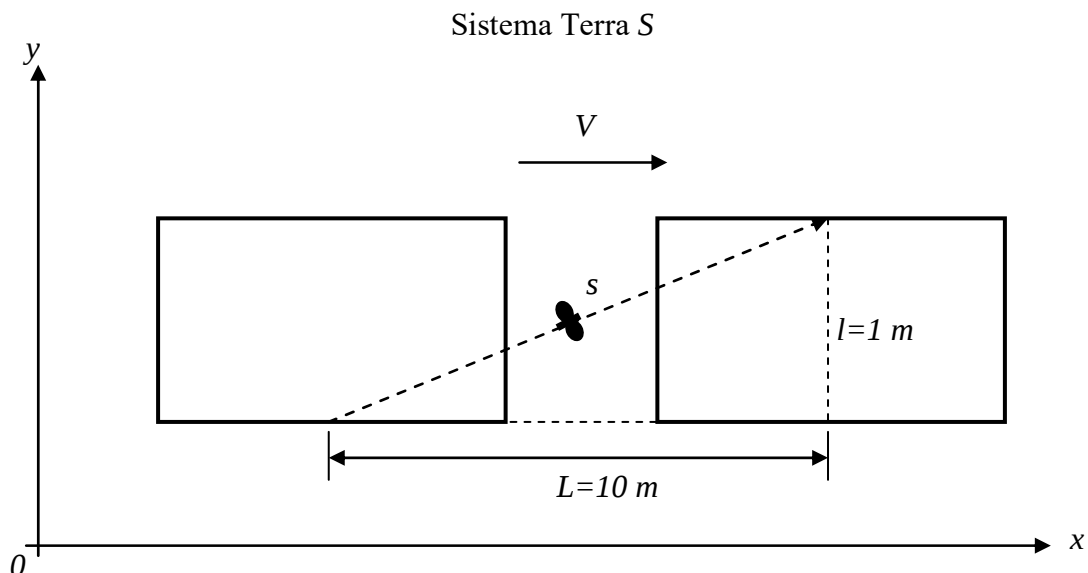
(rappresentate moto e velocità del moscerino nel riferimento dell'auto e in quello della Terra)

Qui la faccenda è un po' più complicata. Nel riferimento dell'auto (adesso vediamo le cose dall'alto):



la velocità del moscerino è ancora $v' = \frac{0.5 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}$ diretta verso il basso o, se vogliamo la sua

unica componente non nulla è $v'_y = -2 \text{ m/s}$. Visto da Terra, il movimento del moscerino appare molto diverso:

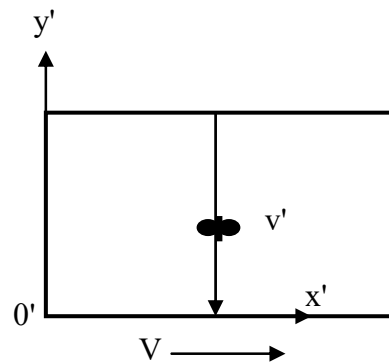
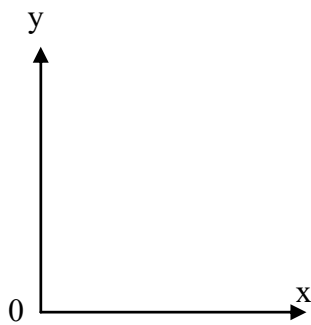


Nel tempo $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ impiegato per andare dal finestrino destro a quello sinistro, l'auto avanza di 10 m verso destra quindi il moscerino si sposta diagonalmente verso l'alto e verso destra,

percorrendo (Teorema di Pitagora) uno spazio: $s = \sqrt{l^2 + L^2} = \sqrt{1^2 + 10^2} \text{ m} = 10.05 \text{ m}$, che diviso

0.5 s da $v' = \frac{10.05 \text{ m}}{0.5 \text{ s}} = 20.1 \text{ m/s}$. Naturalmente si può anche dividere direttamente $s = \sqrt{l^2 + L^2}$ per

Δt e ottenere subito $v = \sqrt{v'^2 + V^2}$, che è il teorema di Pitagora applicato alle velocità².



² Se conoscete già un po' di calcolo vettoriale in 3 dimensioni, è ancora una somma di velocità: basta considerarle come *vettori* di componenti x, y, z in S e x', y', z' .

Infatti $\vec{V} = (V, 0, 0)$, $\vec{v}' = (0, v, 0)$ e quindi :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} = (0, v, 0) + (0, 0, V) = (0, v, V)$$

SCHEDA 4

Il principio di Relatività Galileiano

Siete sul tappeto mobile di un aeroporto, che si muove a velocità costante, rivolti in direzione opposta al moto. Lanciate in alto, verticalmente, una pallina da golf. La pallina ricade:

davanti a voi
dietro di voi
nelle vostre mani

Vi sembrerà strano, ma ricade nelle vostre mani. Infatti inizialmente la palla ha, come voi, una componente nel senso della direzione del moto del tappeto, che non viene modificato da alcuna forza (ricordate che per la Seconda Legge di Newton *perché una velocità si modifichi ci vuole una forza* (la "palla da golf" è abbastanza pesante da non risentire dell'effetto della resistenza dell'aria, che è un fenomeno contingente e non essenziale).

Un esempio più convincente: siete in aereo, che ha già raggiunto la quota di crociera. Se non ci sono turbolenze e non guardate fuori dal finestrino avete la sensazione dell'immobilità. Se la hostess vi versa un caffè, questo non si schianta certo in fondo alla carlinga, ma scende nella tazza in verticale. Che in uno spazio chiuso non ci si possa accorgere di essere fermi o in moto rettilineo uniforme se n'erano accorti in tanti già tanto tempo fa, in particolare Galileo che, nella *Seconda Giornata del Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi*, descrive un esperimento da compiere all'interno di una nave:

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animalletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animalletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma. Voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, nè, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso la poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella loro acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate [...].

Tutto ciò in linguaggio moderno si può riassumere così:

Esistono sistemi di riferimento privilegiati, detti *inerziali*, in cui un corpo non soggetto a forze è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme; un sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema inerziale è a sua volta inerziale.

Questo è il *Principio di Relatività Galileiano*

e le trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali, che come abbiamo visto, per sistemi che slittano lungo le ascisse mantenendo gli altri assi paralleli, sono³:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

sono dette *Trasformazioni Galileiane*,

Un altro modo per esprimere il *Principio di Relatività Galileiano* è dire che *le leggi della meccanica sono invarianti per trasformazioni galileiane*. Infatti la legge della meccanica da cui derivano tutte le altre è la Seconda Legge di Newton che lega forza massa e accelerazione:

$$F = ma$$

ed è chiara che resta la stessa passando da un sistema inerziale all'altro, perché è vero che le trasformazioni galileiane implicano che le velocità diventino $v' = v - V$, ma se consideriamo le *variazioni* della velocità, cioè le *accelerazioni*

$$a' = \frac{\Delta v}{\Delta t} - \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

queste sono invarianti (perché $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 0$, V è costante), quindi è invariante $F = ma$. Se invece il sistema cui si passa non è inerziale, ad esempio il valore di V non è costante, nel secondo riferimento la legge di Newton ha una forma diversa cioè $F = ma - m \frac{\Delta V}{\Delta t}$, l'accelerazione del riferimento viene "sentita" come una nuova forza che non c'è nel primo riferimento.

Notare che se le leggi sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali, non è possibile in uno di loro fare esperimenti che lo distinguano da un altro, in particolare che decidano del suo stato di moto. Sull'aereo in volo di crociera vi sembra di star fermi, a meno che guardiate fuori dal finestrino.

Ultimissima nota di questa un po' troppo lunga parentesi: è più che evidente che la Terra è tutto meno che un riferimento inerziale: gira attorno al Sole e gli oggetti liberi cadono verso il suo centro! Perché l'usiamo così spesso come riferimento privilegiato. Risposta: perché non solo è casa nostra, ma per piccoli tempi e piccoli spazi, come si dice *localmente*, e si considerano solo moti che avvengono sulla superficie terrestre, dove l'effetto della gravità è solo quello di tenere gli oggetti attaccati al suolo, allora il sistema Terra è *abbastanza inerziale*...

³ Avete notato la finezza $t'=t$? Il tempo è lo stesso per i due sistemi, Tra un attimo capirete perché abbiamo sentito il bisogno di specificarlo

SCHEDA 5

Salta quasi tutto!...

Tra fine '800 e inizio '900 la Meccanica è stata sistemata e la Termodinamica comincia a essere tradotta in termini meccanici (moto delle molecole) dei gas. Anche gli altri grandi "pezzi" della Natura, l'elettricità il magnetismo e l'ottica vengono sistemati in una teoria unica, l'Elettromagnetismo, da uno dei grandi della Fisica del secondo '800, James Clerk Maxwell. E qui arriva la mazzata: le equazioni di Maxwell sono perfette, spiegano un mare di fenomeni e soprattutto *unificano* cose che sembravano diverse, in particolare la luce viene spiegata come *un'onda* elettromagnetica di particolare frequenza.

Ci si accorge subito che le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni galileiane. Per forza: nell'equazione che descrive la propagazione delle onde elettromagnetiche, e quindi anche della luce, compare una *costante universale* che ha il significato di velocità della luce

$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300000 \text{ km/s}$) che è la stessa in tutti i sistemi di riferimento!. Com'è possibile?

Secondo la composizione delle velocità, se io vado *incontro* a una sorgente luminosa a una

velocità $\frac{1}{2}c$ dovrei vedere la luce viaggiare a $\frac{3}{2}c$, e invece la vedo andare sempre a c !

Credo che allora solo il giovane Einstein, che faceva l'impiegato all'Ufficio Brevetti di Berna trovasse la cosa non stupefacente o semplicemente sbagliata. Lui ricordava una fantasia da bambino, andava a cavallo di un raggio di luce, alla sua stessa velocità: mica poteva vedere il raggio spegnersi, doveva vederlo ancora *con la stessa velocità*!. Sta di fatto che innumerevoli esperimenti confermarono che la velocità della luce era indipendente da quella dell'osservatore.

E allora, come diceva in quello stesso inizio di secolo Sherlock Holmes:

Eliminato l'impossibile, ciò che resta, *per improbabile che sia*, deve essere la verità

Einstein eliminò l'impossibile, lasciò quello che sembrava improbabile: affermò il principio che la velocità della luce è uguale per tutti gli osservatori (inerziali).

In questo modo ottenne che TUTTE le leggi della fisica, elettromagnetismo compreso, fossero identiche in tutti i sistemi inerziali. E' il principio di Relatività nella versione aggiornata di Einstein.

Per riconquistare questa semplicità nella descrizione della natura, dovremo dimenticarci di idee consolidate ed del "buon senso", che nelle scienze è quasi sempre un cattivo consigliere.

A mo'di incitamento, vi regalo un pensiero di Galileo un po' "Sherlockiano":

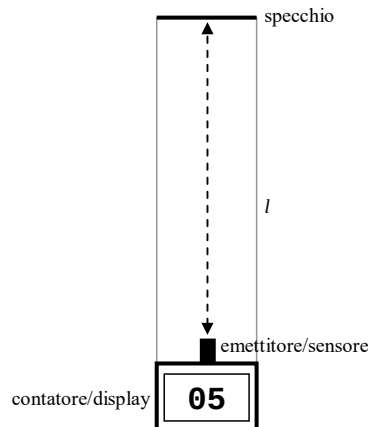
Le conclusioni vere, benché nel primo aspetto sembrino improbabili, additate solamente qualche poco, depongono le vesti che le occultavano, e nude e semplici fanno de' lor segreti gioconda mostra.

Galileo Galilei - *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*

SCHEDA 6

Cambia il tempo...

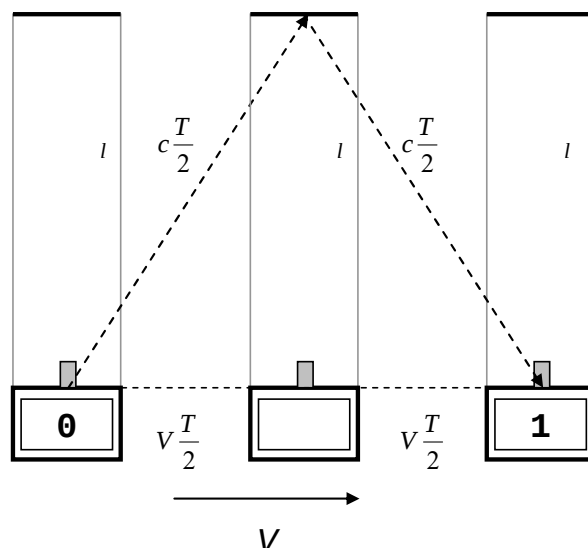
Un orologio è un qualunque "cosa" che utilizzi un fenomeno periodico per marcare il tempo (pendolo, un metronomo, lo sgocciolamento di un rubinetto, la frequenza di risonanza di un atomo...). Noi ci inventiamo un "orologio a luce":



Un lampo di luce viene "sparato" verticalmente contro uno specchio a distanza l da un dispositivo che è anche in grado di rilevare la luce riflessa. Quando il lampo riflesso viene rilevato, il display si incrementa di una unità e viene emesso un nuovo lampo. In questo modo il display conta il tempo in unità $T_0 = \frac{2l}{c}$. Può darsi che ci siano delle difficoltà tecnologiche nel costruire un tale dispositivo, ma non ci interessano: in linea di principio il nostro orologio è "pensabile" (questo è un *esperimento mentale*).

Adesso pensate l'orologio a luce montato su un Freccia Rossa che va a velocità V rispetto alla Terra. Per un osservatore sul treno il "tick" dell'orologio ha il valore che abbiamo visto, ma provate a calcolare il "tick" dal punto di vista di un osservatore a terra... (Suggerimento: disegnate l'orologio nel sistema Terra a due valori successivi del display)

Ecco qua nel riferimento a Terra:



Qui il Freccia Rossa va un bel po' veloce, forse meglio pensare all'Enterprise di Star Trek...

Se T è il tempo sull'orologio a terra che il raggio di luce ci mette a partire e a tornare al sensore, tenendo presente l'indipendenza della velocità della luce dall'osservatore, con il solito Teorema di Pitagora si ottiene:

$$\left(c \frac{T}{2}\right)^2 = \left(V \frac{T}{2}\right)^2 + l^2 \Rightarrow c^2 T^2 = V^2 T^2 + 4l^2$$

ma $T_0 = \frac{2l}{c}$, cioè $2l = cT_0$ quindi sostituendo nella relazione trovata sopra $c^2 T^2 = V^2 T^2 + c^2 T_0^2$.

Ricavate T_0 , è facile:

$$T_0 = T \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

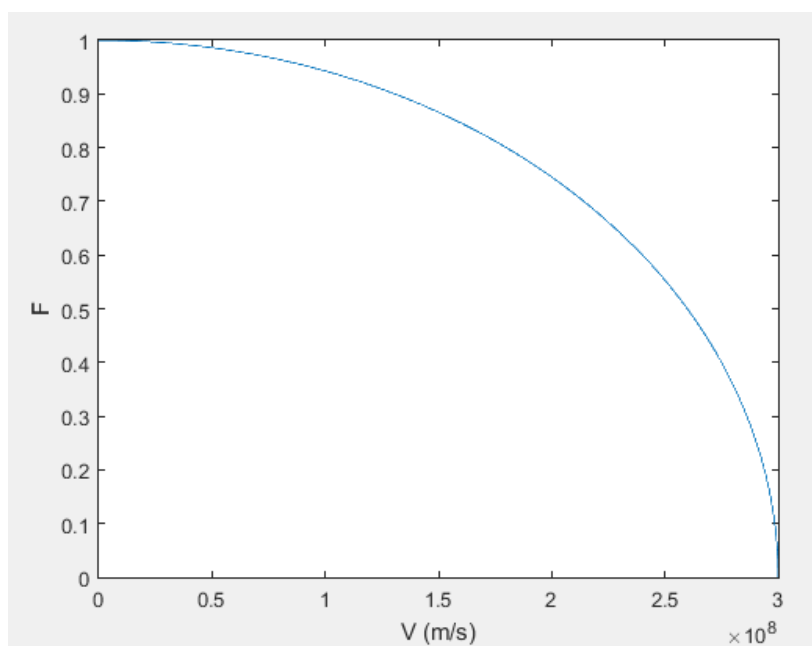
Cioè l'orologio a bordo di treno, o razzo che sia, è *rallentato rispetto quello fermo al suolo*:

Semplificando un po':

GLI OROLOGI IN MOVIMENTO RALLENTANO

fenomeno detto anche delle DILATAZIONE DEL TEMPO.

Come mai non ce ne accorgiamo? E che la velocità della luce è molto grande rispetto a quelle che noi di solito osserviamo nel nostro mondo di mezzo. Ecco il fattore $F = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$ in funzione di V :



Fino a velocità piuttosto alte resta praticamente a 1, scende intorno a 0.99 solo a $0.5 \cdot 10^8$ m/s, cioè a 50000 km/s !. Però l'effetto è stato verificato montando un orologio atomico su un razzo, e anche

osservando certe particelle che si formano con alte energie e alte velocità (consistenti frazioni di c) per interazione dei raggi cosmici con gli strati alti dell'atmosfera. Queste particelle sono instabili, vivono pochi microsecondi poi si disintegrano in altre cose. Arrivano sulla superficie della terra solo perché il loro orologio interno è rallentato dall'alta velocità, e così nel nostro riferimento vivono più a lungo.

SCHEMA 7

Adesso un esempio su cui lavorare un po'...

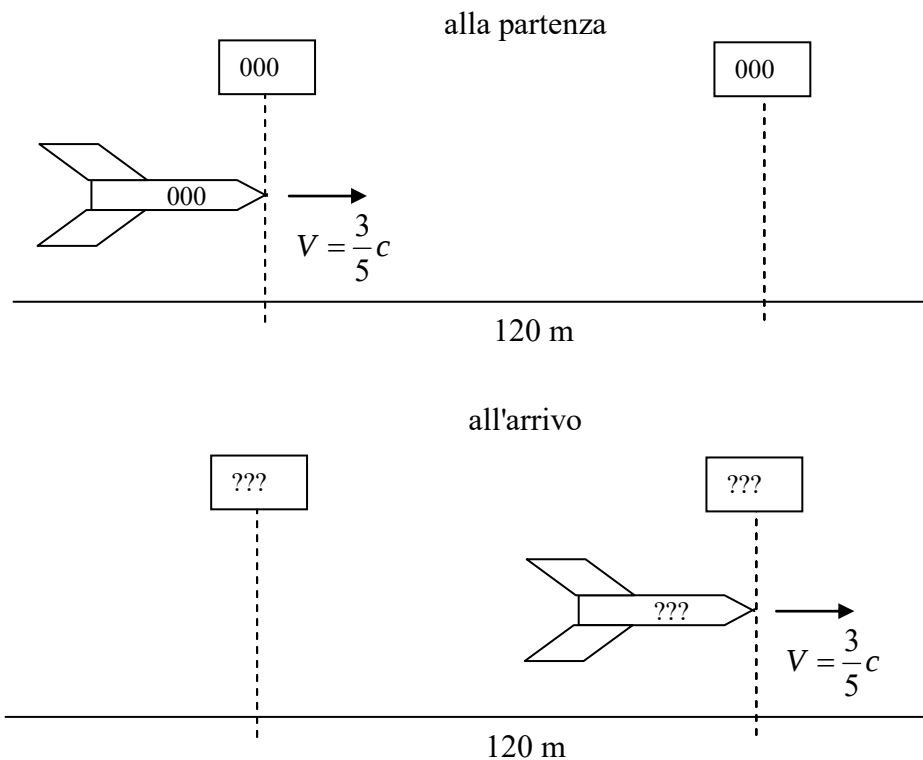
Di qui in avanti facciamo un patto: per evitare di fare calcoli con numeri troppo grossi o troppo piccoli, misuriamo il tempo in *blob*, che è ovviamente un'unità inventata al momento. Il blob è il tempo che la luce impiega a percorrere un metro, di modo che $c = 1 \text{ m/blob}$.

Quindi $1 \text{ blob} = 3.33 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 3.33 \text{ ns}$, anche se questo non c'importa molto.

Un razzo percorre (lanciato) un tratto di 120 m a velocità costante $\frac{3}{5}c = \frac{3}{5} \frac{\text{m}}{\text{blob}}$ nel riferimento della

Terra. Linea di partenza e traguardo dotati di due orologi sincronizzati che inizialmente, quando il razzo attraversa la linea di partenza, segnano entrambi 0 blob. In quel momento anche l'orologio del razzo segna 0 blob⁴:

nel riferimento della terra



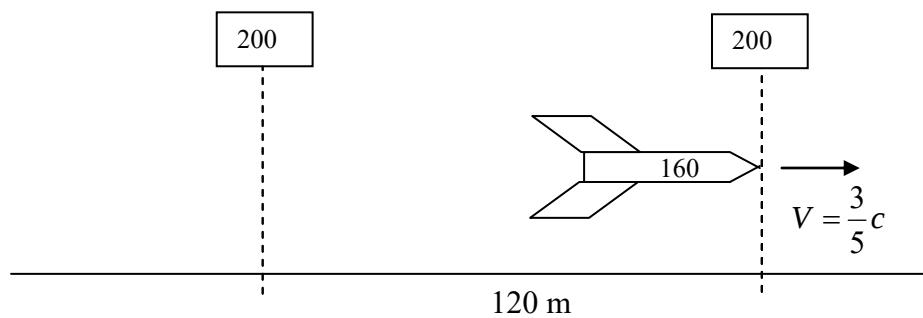
Calcolate cosa segnano i due orologi solidali col sistema Terra e quello del razzo quando quest'ultimo taglia il traguardo.

⁴ Notate che quando due orologi in due riferimenti diversi possono essere in linea di principio sincronizzati senza problemi quando, come in questo caso, *coincidono spazialmente*, perché si possono "leggere" l'un l'altro istantaneamente (sono a distanza nulla).

Beh, nel sistema della terra è semplice: $T_T = \frac{L_T}{V} = \frac{120 \text{ m}}{\frac{3}{5} \text{ blob/s}} = 200 \text{ blob}$. L'orologio del razzo è

rallentato e segna $T_R = T_T \sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 0.8 \cdot 200 \text{ blob} = 160 \text{ blob}$

all'arrivo

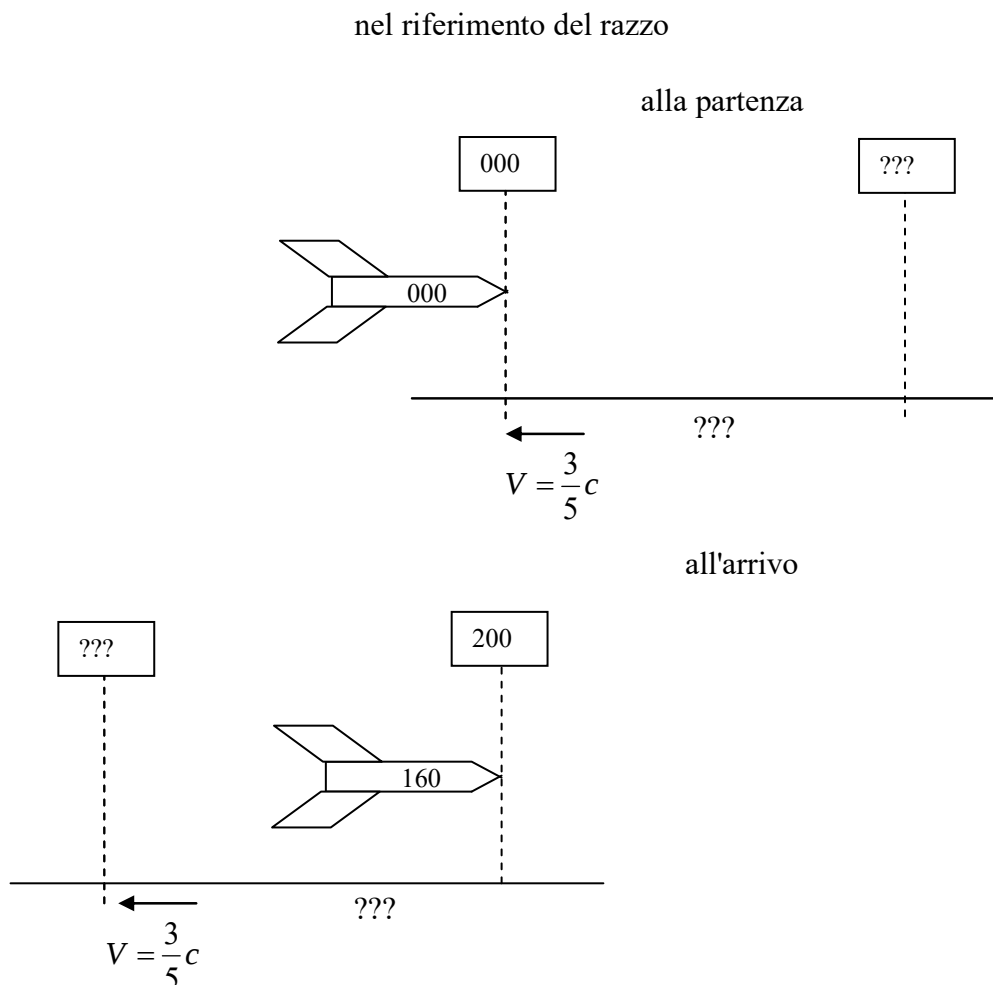


SCHEDA 8

Riferitevi alla scheda precedente. Quando taglia il traguardo, l'orologio del razzo segna 160 blob.

perché è rallentato di un fattore $\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}c\right)^2} = \frac{4}{5} = 0.8$ rispetto agli orologi a terra.

D'altra parte, nel suo riferimento, il pilota del razzo vede il tratto da percorrere venirgli incontro alla velocità di $\frac{3}{5}c = \frac{3}{5} \frac{\text{m}}{\text{blob}}$:



Qual è la lunghezza del tratto fra linea di partenza e traguardo nel sistema del razzo?

Dal suo punto di vista, il razzo percorre $L_R = VT_R = \frac{3}{5}cT_R$ o, equivalentemente, è questa la

lunghezza del tratto che gli corre incontro. Ma $T_R = T_T \sqrt{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}$ e $T_T = \frac{L_T}{V}$. Mettendo insieme il tutto si ottiene:

$$L_R = L_T \sqrt{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2} = 120 \text{ m} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 0.8 \cdot 120 \text{ m} = 96 \text{ m}$$
 . Non solo gli orologi in moto rallentano, ma anche le lunghezze in movimento si contraggono, dello stesso fattore, lungo la direzione del

moto. E il principio delle *CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE*. E' evidente che le scelte iniziali di Einstein ci scombinate le nostre vecchie idee sulla *STRUTTURA DELLO SPAZIO-TEMPO*.

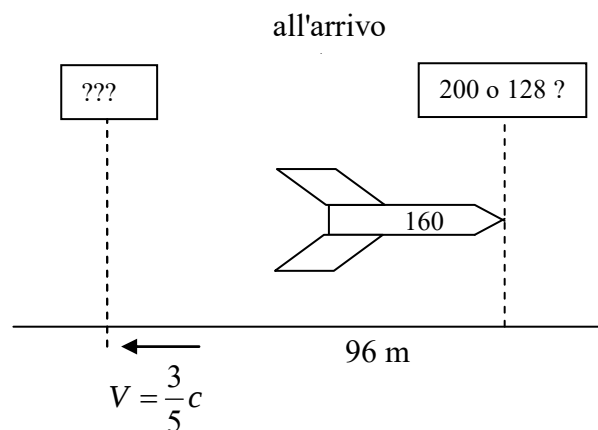
SCHEDE 9

Restiamo sul nostro razzo. Visto da qui, il sistema terra come abbiamo detto si muove di velocità $\frac{3}{5}c$. Ma allora gli orologi solidali con la Terra devono rallentare rispetto a quello del razzo, in base al principio generale che gli orologi in moto ritardano. Quindi, durante la corsa del razzo, che nel suo riferimento dura 160 blob, il suo pilota deve vedere gli orologi a terra segnare un *intervallo* di

$160 \text{ blob} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 160 \text{ blob} \cdot 0.8 = 128 \text{ blob}$. Insomma, *entrambi* i due sistemi di orologi ritardano l'uno rispetto all'altro!

Vi sembra impossibile? Sì, anche se strano. E deve essere così, se no i suoi sistemi inerziali sarebbero distinguibili, contro il principio di relatività einsteiniano.

Comunque il problema più grosso è che quando il razzo finisce la corsa l'orologio sul traguardo sembrerebbe dover segnare *sia 200 bob che 128 blob*!



Come si risolve la contraddizione? E poi E' una contraddizione?

Per fissare le idee usate il suffisso *T* per le grandezze nel sistema Terra, il suffisso *R* per quelle nel sistema del razzo.

SCHEDA 10

Proviamo a mettere tutto insieme. Il razzo taglia il traguardo a un tempo $T_T = 200$ blob e a un tempo

$$T_R = T_T \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = 200 \text{ blob} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 200 \text{ blob} \cdot 0.8 = 160 \text{ blob} \text{ nel riferimento del razzo.}$$

D'altra parte il razzo vede il percorso venirgli incontro alla velocità $V = \frac{3}{5}c$. Se lo passa tutto in

$T_R = 160$ blob vuol dire che la sua lunghezza nel riferimento del razzo è

$$L_R = VT_R = VT_T \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = L_T \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = 120 \text{ m} \cdot 0.8 = 96 \text{ m}. \text{ Come sapevamo già. Però nel}$$

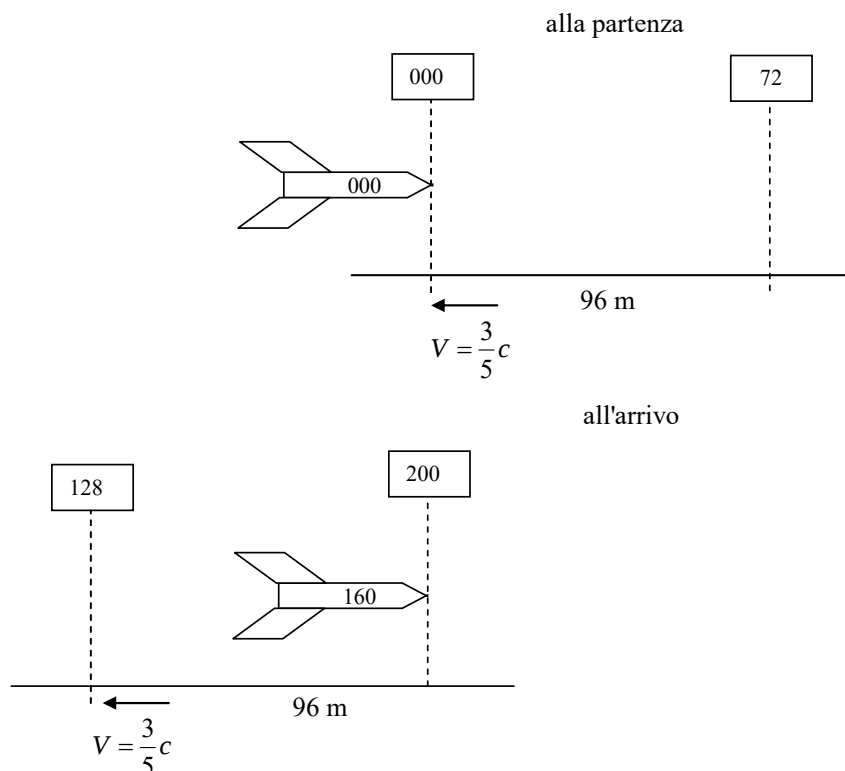
riferimento del razzo anche gli orologi "terrestri" su linea di partenza e traguardo si muovono di velocità $V = \frac{3}{5}c$, quindi rallentano e devono indicare un tempo trascorso

$$T_R \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = T_T \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \right] = 200 \text{ blob} \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right] = 200 \text{ blob} \cdot 0.8^2 = 128 \text{ blob}$$

Ma questo non dovrebbe essere appunto $T_T = 200$ blob? L'unica spiegazione possibile è che nel sistema del razzo l'orologio sul traguardo segnava *già* $200 \text{ blob} - 128 \text{ blob} = 72 \text{ blob}$ a inizio corsa! Due orologi sincronizzati in un riferimento in cui sono *fermi* non lo sono in un riferimento in cui sono in moto: quello "posteriore" (che arriva dopo) è in anticipo di

$$T_T - T_T \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \right] = T_T \left(\frac{V}{c}\right)^2 = T_T V \frac{V}{c^2} = L_T \frac{V}{c^2}$$

nel riferimento del razzo



Il fatto che orologi sincronizzati in riferimento non lo siano in uno che è in moto significa che eventi *contemporanei* in un riferimento non lo siano in un altro: è la **RELATIVITA' DELLA CONTEMPORANEITA'**:

concetti come *prima* e *dopo* diventano relativi come il loro corrispondenti spaziali *avanti* e *indietro*. Non c'è da stupirsi, dal momento che il tempo al pari delle coordinate spaziali, non è più lo stesso per tutti gli osservatori.

Bisogna accettare il nuovo modo di vedere il tempo, tenendo presente che spesso i paradossi sono solo difficoltà ad accettare il nuovo punto di vista. Tutte le volte che sembra emergere una vera *contraddizione logica*, un po' di ragionamento mette a posto le cose. Vediamo un esempio un po' complicato:

Supponiamo ora che un osservatore posto sul traguardo legga con un binocolo il tempo segnato dall'orologio sulla linea di partenza, nel momento dell'arrivo del razzo, e lo comunichi al pilota.

- Nel riferimento della Terra i due orologi sono sincronizzati, ma la luce deve percorrere $L_T = 120 \text{ m}$, per cui l'osservatore legge l'orologio com'era a un tempo

$$\frac{L_T}{c} = \frac{120 \text{ m}}{1 \text{ m/blob}} = 120 \text{ blob prima dei 200 blob corrispondenti all'arrivo, cioè}$$

$$200 \text{ blob} - 120 \text{ blob} = 80 \text{ blob}.$$

- Nel riferimento del razzo l'orologio segna 128 blob (è in ritardo di 72 blob rispetto a quello sul traguardo), ma l'osservatore *corre incontro* alla luce che gli arriva in un tempo T'_R dato da

$$cT'_R + VT'_R = L_R \Rightarrow T'_R = \frac{L_R}{c+V} = \frac{L_T}{c+V} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}.$$

Però gli orologi a terra "battono" più

lentamente rispetto a quello del razzo, per cui l'osservatore vede l'orologio sulla linea di

$$\text{partenza con un ritardo di } T'_R \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = \frac{L_T}{c+V} \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \right] = \frac{120 \text{ m}}{\frac{8}{5} \text{ m/blob}} \cdot 0.64 = 48 \text{ blob e quindi}$$

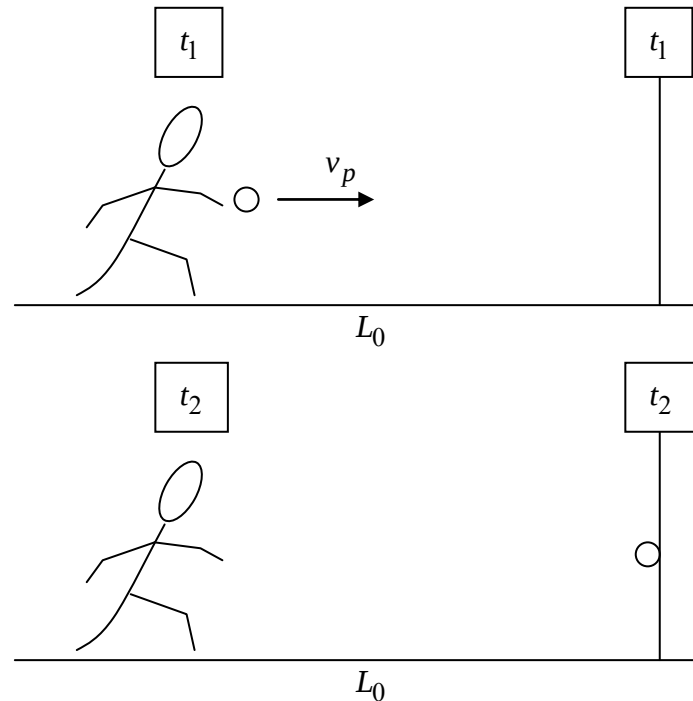
$$\text{lo vede segnare } 128 \text{ blob} - 48 \text{ blob} = 80 \text{ blob}.$$

Non c'è quindi contraddizione fra i due sistemi di riferimento (e non DEVE esserci, perché l'evento - guarda cosa segna l'orologio alla partenza quando il razzo è al traguardo - è *lo stesso* in entrambi i riferimenti).

SCHEDA 11

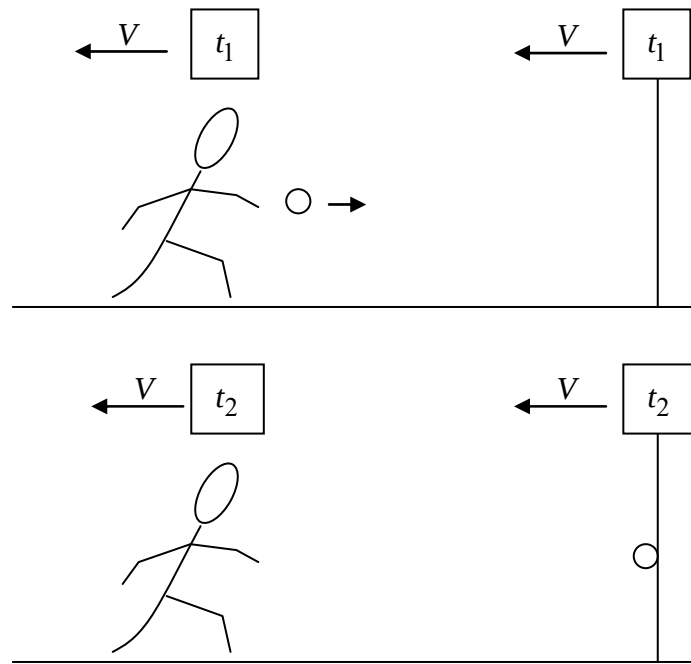
casualità e velocità della luce...

Un uomo lancia una palla di neve a una velocità v_p contro un muro distante L_0 . Un orologio è situato sulla posizione dell'uomo, l'altro, sincronizzato con il primo, sul muro. Nel sistema in cui orologi lanciatore muro sono fermi, detto t_1 l'istante del lancio e t_2 quello dell'impatto,



il tempo di volo della palla è $t_2 - t_1 = \frac{L_0}{v_p}$. Per un osservatore che si muove a velocità V verso destra

(chiamiamolo Alice), e passa per la posizione del lanciatore al momento del lancio, cioè quando l'orologio sul lanciatore segna t_1 , la cosa è più complicata:



L'orologio sul muro nel riferimento di Alice è in anticipo sull'altro di $\frac{L_0 V}{c^2}$ (Vedi SCHEDA 10),

quindi parte da $t_1 + \frac{L_0 V}{c^2}$ e all'impatto segna un tempo trascorso $t_2 - \left(t_1 + \frac{L_0 V}{c^2}\right)$. Non è però questo il tempo trascorso nel riferimento di Alice, perché gli orologi rispetto ad Alice sono in moto e quindi ticchettano più lentamente. Il tempo trascorso per Alice è perciò maggiore e vale:

$$\frac{t_2 - t_1 - \frac{L_0 V}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Noi sappiamo che contemporaneità e prima e dopo sono concetti relativi. Qui però c'è un problema e una possibile fonte di *vero paradosso*: non potrebbe esistere un riferimento in cui la palla di neve colpisce il muro *prima* di essere lanciata? Verrebbe a cadere ogni possibile relazione di causa effetto, *se un effetto potesse precedere la sua causa!*.

Vediamo allora cosa succede se imponiamo che la relazione appena trovata sia *sempre positiva*, che il lancio preceda sempre l'impatto.

Anzitutto deve essere $V \leq c$, perché altrimenti il denominatore diventerebbe immaginario, come tutta l'espressione e, oltre alla difficoltà a dare un senso a un *tempo complesso*, i *numeri complessi non si possono ordinare*. Possiamo anche escludere il caso $V = c$: il denominatore si annullerebbe e l'intervallo di tempo a numeratore non sarebbe definito

Con queste condizioni, deve essere :

$$t_2 - t_1 - \frac{L_0 V}{c^2} > 0 \Leftrightarrow t_2 - t_1 > \frac{L_0 V}{c^2} \Leftrightarrow \frac{L_0}{v_p} > \frac{L_0 V}{c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{V}{c}\right) \left(\frac{v_p}{c}\right) < 1$$

Visto che abbiamo supposto $V < c$, deve essere anche $v_p \leq c$. Ma v_p può essere la velocità di qualunque corpo o di qualunque interazione che *veicoli una causa* o, equivalentemente, che *trasporti informazione* in grado di modificare il comportamento del ricevente. In altri termini,

LA VELOCITÀ DELLA LUCE È LA MASSIMA VELOCITÀ DI TRASFERIMENTO DELL'INFORMAZIONE,

in particolare la massima velocità con cui si può muovere un oggetto fisico, almeno finché vogliamo continuare a pensare a un Universo fatto di cause e di effetti. Tutte le volte che finora si sono ipotizzati fenomeni più veloci della luce, questi si sono rivelati incapaci di portare informazione.