Il caso e la matematica

Francesco Caravenna

Università degli Studi di Milano-Bicocca

Summer School "La Matematica Oggi"

San Pellegrino Terme $\sim$ 4 settembre 2019

Qualche premessa

- Sono un matematico, mi occupo di calcolo delle probabilità

Qualche premessa

- Sono un matematico, mi occupo di calcolo delle probabilità
- Cercherò di presentarvi qualche idea sul caso e sulle probabilità, per mezzo di esempi e della loro trattazione matematica

Qualche premessa

- Sono un matematico, mi occupo di calcolo delle probabilità
- Cercherò di presentarvi qualche idea sul caso e sulle probabilità, per mezzo di esempi e della loro trattazione matematica
- Diversi esempi riguardano il gioco d'azzardo

  Non sono un giocatore d'azzardo, né uno scommettitore!

Qualche premessa

- Sono un matematico, mi occupo di calcolo delle probabilità
- Cercherò di presentarvi qualche idea sul caso e sulle probabilità, per mezzo di esempi e della loro trattazione matematica
- Diversi esempi riguardano il gioco d'azzardo

  Non sono un giocatore d'azzardo, né uno scommettitore!

  (ma mia madre gioca al Lotto. . .)

Qualche premessa

- Sono un matematico, mi occupo di calcolo delle probabilità
- Cercherò di presentarvi qualche idea sul caso e sulle probabilità, per mezzo di esempi e della loro trattazione matematica
- Diversi esempi riguardano il gioco d'azzardo

  Non sono un giocatore d'azzardo, né uno scommettitore!

  (ma mia madre gioca al Lotto...)
- Il mio approccio sarà leggero, ma il tema ha risvolti patologici

Sommario

Sommario

Che cos'è il caso?

Che cos'è il caso?

Certi fenomeni non possono essere previsti con certezza (perché?)

Che cos'è il caso?

Certi fenomeni non possono essere previsti con certezza (perché?)

- Che tempo farà domani?
- Quanto varranno le azioni di Amazon tra un mese?
- Chi vincerà il prossimo campionato di Serie A?
- Farò un tamponamento quest'anno?
- Che numero uscirà alla roulette?

Che cos'è il caso?

Certi fenomeni non possono essere previsti con certezza (perché?)

- Che tempo farà domani?
- Quanto varranno le azioni di Amazon tra un mese?
- Chi vincerà il prossimo campionato di Serie A?
- Farò un tamponamento quest'anno?
- Che numero uscirà alla roulette?

Possiamo fornire diverse risposte, ciascuna con una probabilità

Che cos'è il caso?

Certi fenomeni non possono essere previsti con certezza (perché?)

- Che tempo farà domani?
- Quanto varranno le azioni di Amazon tra un mese?
- Chi vincerà il prossimo campionato di Serie A?
- Farò un tamponamento quest'anno? NO SÌ
- Che numero uscirà alla roulette?

Possiamo fornire diverse risposte, ciascuna con una probabilità

Che cos'è il caso?

Certi fenomeni non possono essere previsti con certezza (perché?)

- Che tempo farà domani?
- Quanto varranno le azioni di Amazon tra un mese?
- Chi vincerà il prossimo campionato di Serie A?
- Farò un tamponamento quest'anno? NO $\frac{9}{10} = 90\%$ SÌ $\frac{1}{10} = 10\%$
- Che numero uscirà alla roulette?

Possiamo fornire diverse risposte, ciascuna con una probabilità

Che cos'è il caso?

Certi fenomeni non possono essere previsti con certezza (perché?)

- Che tempo farà domani?
- Quanto varranno le azioni di Amazon tra un mese?
- Chi vincerà il prossimo campionato di Serie A?
- Farò un tamponamento quest'anno? NO $\frac{9}{10} = 90\%$ SÌ $\frac{1}{10} = 10\%$
- Che numero uscirà alla roulette? 0 1 2 ... 36

Possiamo fornire diverse risposte, ciascuna con una probabilità

Che cos'è il caso?

Certi fenomeni non possono essere previsti con certezza (perché?)

- Che tempo farà domani?
- Quanto varranno le azioni di Amazon tra un mese?
- Chi vincerà il prossimo campionato di Serie A?
- Farò un tamponamento quest'anno? NO $\frac{9}{10} = 90\%$ SÌ $\frac{1}{10} = 10\%$
- Che numero uscirà alla roulette? 0 $\frac{1}{37}$ 1 $\frac{1}{37}$ 2 $\frac{1}{37}$ ... 36 $\frac{1}{37}$

Possiamo fornire diverse risposte, ciascuna con una probabilità

Che cos'è la probabilità?

Che cos'è la probabilità?

A = "esce il numero 3 alla roulette" B = "farò un tamponamento"

Che cosa intendo con $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{37} \simeq 2.7\%$ e $\mathbb{P}(B) = 10\%$?

Che cos'è la probabilità?

A = "esce il numero 3 alla roulette" B = "farò un tamponamento"

Che cosa intendo con $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{37} \simeq 2.7\%$ e $\mathbb{P}(B) = 10\%$?

Interpretazione frequentista

$\mathbb{P}(C) \approx$ frazione di volte in cui si verifica C

(ripetendo tante volte l'esperimento)

Che cos'è la probabilità?

A = "esce il numero 3 alla roulette" B = "farò un tamponamento"

Che cosa intendo con $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{37} \simeq 2.7\%$ e $\mathbb{P}(B) = 10\%$?

Interpretazione frequentista

$\mathbb{P}(C) \approx$ frazione di volte in cui si verifica C

(ripetendo tante volte l'esperimento)

Probabilità soggettiva

$\mathbb{P}(C) =$ "grado di fiducia" che attribuisco al verificarsi di C

(espresso in % o in $[0, 1]$)

Che cos'è la probabilità?

A = "esce il numero 3 alla roulette"   B = "farò un tamponamento"

Che cosa intendo con $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{37} \simeq 2.7\%$ e $\mathbb{P}(B) = 10\%$?

Interpretazione frequentista

$\mathbb{P}(C) \approx$ frazione di volte in cui si verifica C

(ripetendo tante volte l'esperimento)

Probabilità soggettiva

$\mathbb{P}(C) =$ "grado di fiducia" che attribuisco al verificarsi di C

(espresso in % o in $[0, 1]$)

La Matematica permette di studiare quantitativamente la probabilità

(quale che sia l'interpretazione!)

Previsioni del tempo

Analizzando molteplici dati atmosferici relativi a oggi (nuvole, venti, . . .) vogliamo capire se domani ci sarà

SOLE o PIOGGIA ?

Previsioni del tempo

Analizzando molteplici dati atmosferici relativi a oggi (nuvole, venti, . . .) vogliamo capire se domani ci sarà

SOLE 70% PIOGGIA 30%

Non disponendo di un modello "perfetto", non abbiamo una risposta, ma due risposte, ciascuna con una probabilità. Che cosa vuol dire?

Previsioni del tempo

Analizzando molteplici dati atmosferici relativi a oggi (nuvole, venti, . . .) vogliamo capire se domani ci sarà

SOLE 70% PIOGGIA 30%

Non disponendo di un modello "perfetto", non abbiamo una risposta, ma due risposte, ciascuna con una probabilità. Che cosa vuol dire?

Interpretazione frequentista

Considerando tanti giorni analoghi a oggi, il tempo domani sarà

SOLE 7 giorni su 10 PIOGGIA 3 giorni su 10

Previsioni del tempo

Analizzando molteplici dati atmosferici relativi a oggi (nuvole, venti, . . .) vogliamo capire se domani ci sarà

SOLE 70% PIOGGIA 30%

Non disponendo di un modello "perfetto", non abbiamo una risposta, ma due risposte, ciascuna con una probabilità. Che cosa vuol dire?

Interpretazione frequentista

Considerando tanti giorni analoghi a oggi, il tempo domani sarà

SOLE 7 giorni su 10 PIOGGIA 3 giorni su 10

Se dobbiamo dare una risposta, diremo SOLE (sbagliando 3 volte su 10)

Sondaggi

Due candidati A e B competono a un ballottaggio

Sondaggi

Due candidati A e B competono a un ballottaggio

Per prevedere chi vincerà, intervistiamo un campione di 1.000 persone

Sondaggi

Due candidati A e B competono a un ballottaggio

Per prevedere chi vincerà, intervistiamo un campione di 1.000 persone

Esito: 520 voteranno per A, 480 voteranno per B

Sondaggi

Due candidati A e B competono a un ballottaggio

Per prevedere chi vincerà, intervistiamo un campione di 1.000 persone

Esito: 520 voteranno per A, 480 voteranno per B

Supponiamo che gli intervistati dicano la verità (!)

Sondaggi

Due candidati A e B competono a un ballottaggio

Per prevedere chi vincerà, intervistiamo un campione di 1.000 persone

Esito: 520 voteranno per A, 480 voteranno per B

Supponiamo che gli intervistati dicano la verità (!)

La previsione naturale è che A vincerà il ballottaggio (52% vs. 48%)

Sondaggi

Due candidati A e B competono a un ballottaggio

Per prevedere chi vincerà, intervistiamo un campione di 1.000 persone

Esito: 520 voteranno per A, 480 voteranno per B

Supponiamo che gli intervistati dicano la verità (!)

La previsione naturale è che A vincerà il ballottaggio (52% vs. 48%)

Problema

Potrebbe accadere che la maggioranza della popolazione ha votato B, ma "per caso" essa è sottorappresentata nel campione di 1.000 persone

Sondaggi

Due candidati A e B competono a un ballottaggio

Per prevedere chi vincerà, intervistiamo un campione di 1.000 persone

Esito: 520 voteranno per A, 480 voteranno per B

Supponiamo che gli intervistati dicano la verità (!)

La previsione naturale è che A vincerà il ballottaggio (52% vs. 48%)

Problema

Potrebbe accadere che la maggioranza della popolazione ha votato B, ma "per caso" essa è sottorappresentata nel campione di 1.000 persone

Teorema

Ciò accade con circa il 10% di probabilità (se B avesse il 50,1% dei voti)

Accettare l'errore

In casi come il sondaggio precedente, l'incertezza è inevitabile
(a meno di non intervistare l'intera popolazione...)

Accettare l'errore

In casi come il sondaggio precedente, l'incertezza è inevitabile
(a meno di non intervistare l'intera popolazione...)

> È inevitabile (e anzi "giusto"!) che i sondaggi talvolta sbaglino

Accettare l'errore

In casi come il sondaggio precedente, l'incertezza è inevitabile
(a meno di non intervistare l'intera popolazione. . .)

> È inevitabile (e anzi "giusto"!) che i sondaggi talvolta sbaglino

Altrove funzionano molto meglio che da noi. . .

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di 23 persone.

Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di 23 persone.

Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

Teorema

Tale probabilità è circa del 50% (!)

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di 23 persone.

Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

Teorema

Tale probabilità è circa del 50% (!)

Per un gruppo di 42 persone, la probabilità sale al 90% (!!)

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di 23 persone.

Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

Teorema

Tale probabilità è circa del 50% (!)

Per un gruppo di 42 persone, la probabilità sale al 90% (!!)

Formula generale

In un gruppo di n persone, la probabilità vale $\approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di 23 persone.

Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

Teorema

Tale probabilità è circa del 50% (!)

Per un gruppo di 42 persone, la probabilità sale al 90% (!!)

Formula generale

In un gruppo di n persone, la probabilità vale $\approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$

Vedremo più avanti come ricavare questo risultato (e con quali ipotesi)

Sommario

Variabili aleatorie

Consideriamo un gioco (scommessa) con due soli esiti: o vinco, o perdo

Variabili aleatorie

Consideriamo un gioco (scommessa) con due soli esiti: o vinco, o perdo

Scommetto 1€ su "esce il numero 3 alla roulette"

Variabili aleatorie

Consideriamo un gioco (scommessa) con due soli esiti: o vinco, o perdo

Scommetto 1€ su "esce il numero 3 alla roulette"

- Se vinco, ricevo 36€
- Se perdo, non ricevo niente

Variabili aleatorie

Consideriamo un gioco (scommessa) con due soli esiti: o vinco, o perdo

Scommetto 1€ su "esce il numero 3 alla roulette"

- Se vinco, ricevo 36€
- Se perdo, non ricevo niente

Mi conviene giocare?

Variabili aleatorie

Consideriamo un gioco (scommessa) con due soli esiti: o vinco, o perdo

Scommetto 1€ su "esce il numero 3 alla roulette"

- Se vinco, ricevo 36€
- Se perdo, non ricevo niente

Mi conviene giocare?

Indichiamo con X il guadagno (con segno!)

$$X = \begin{cases} 36 - 1 = 35 & \text{se } \textit{vinco} \\ 0 - 1 = -1 & \text{se } \textit{perdo} \end{cases}$$

X è una "auantità casuale", detta variabile aleatoria

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

$$\mathrm{E}[X] \;=\; 35 \cdot \mathbb{P}(\text{vinco}) - 1 \cdot \mathbb{P}(\text{perdo})$$

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

$$\mathrm{E}[X] \; = \; 35 \cdot \mathbb{P}(\text{vinco}) - 1 \cdot \mathbb{P}(\text{perdo}) \; = \; 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} \; = \; -\frac{1}{37}$$

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

$$\mathrm{E}[X] \;=\; 35 \cdot \mathbb{P}(\text{vinco}) - 1 \cdot \mathbb{P}(\text{perdo}) \;=\; 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} \;=\; -\frac{1}{37}$$

- Se $\mathrm{E}[X]$ è positivo $\quad\leftrightsquigarrow\quad$ il gioco è favorevole

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

$$\mathrm{E}[X] \;=\; 35 \cdot \mathbb{P}(\text{vinco}) - 1 \cdot \mathbb{P}(\text{perdo}) \;=\; 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} \;=\; -\frac{1}{37}$$

- Se $\mathrm{E}[X]$ è positivo / negativo $\leftrightsquigarrow$ il gioco è favorevole / sfavorevole

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

$$\mathrm{E}[X] \;=\; 35 \cdot \mathbb{P}(\text{vinco}) - 1 \cdot \mathbb{P}(\text{perdo}) \;=\; 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} \;=\; -\frac{1}{37}$$

- Se $\mathrm{E}[X]$ è positivo / negativo $\leftrightsquigarrow$ il gioco è favorevole / sfavorevole

Interpretazione frequentista

Ripetiamo tante volte N il gioco, indichiamo con $X_1, \ldots, X_N$ i guadagni

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

$$E[X] \;=\; 35 \cdot \mathbb{P}(\text{vinco}) - 1 \cdot \mathbb{P}(\text{perdo}) \;=\; 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} \;=\; -\frac{1}{37}$$

- Se $E[X]$ è positivo / negativo $\leftrightsquigarrow$ il gioco è favorevole / sfavorevole

Interpretazione frequentista

Ripetiamo tante volte N il gioco, indichiamo con $X_1, \ldots, X_N$ i guadagni

$$\text{Allora} \qquad E[X] \;\approx\; \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

$$\mathrm{E}[X] \;=\; 35 \cdot \mathbb{P}(\text{vinco}) - 1 \cdot \mathbb{P}(\text{perdo}) \;=\; 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} \;=\; -\frac{1}{37}$$

- Se $\mathrm{E}[X]$ è positivo / negativo $\leftrightsquigarrow$ il gioco è favorevole / sfavorevole

Interpretazione frequentista

Ripetiamo tante volte N il gioco, indichiamo con $X_1, \ldots, X_N$ i guadagni

$$\text{Allora} \qquad \mathrm{E}[X] \;\approx\; \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

- Si tratta di un teorema matematico: la Legge dei Grandi Numeri

Valore medio

Definiamo il valore medio della variabile aleatoria X

$$\mathrm{E}[X] \;=\; 35 \cdot \mathbb{P}(\text{vinco}) - 1 \cdot \mathbb{P}(\text{perdo}) \;=\; 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} \;=\; -\frac{1}{37}$$

- Se $\mathrm{E}[X]$ è positivo / negativo $\leftrightsquigarrow$ il gioco è favorevole / sfavorevole

Interpretazione frequentista

Ripetiamo tante volte N il gioco, indichiamo con $X_1, \ldots, X_N$ i guadagni

$$\text{Allora} \qquad \mathrm{E}[X] \;\approx\; \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

- Si tratta di un teorema matematico: la Legge dei Grandi Numeri
- Gioco favorevole / sfavorevole $\leftrightsquigarrow$ bilancio in attivo / passivo

Giochi favorevoli?

È molto difficile avere la possibilità di giocare a un gioco favorevole

Giochi favorevoli?

È molto difficile avere la possibilità di giocare a un gioco favorevole

Ma non impossibile!

Negli anni '80 un gruppo di studenti del MIT riuscì a vincere molto denaro al blackjack con tecniche di conteggio delle carte (film "21")

Giochi favorevoli?

È molto difficile avere la possibilità di giocare a un gioco favorevole

Ma non impossibile!

Negli anni '80 un gruppo di studenti del MIT riuscì a vincere molto denaro al blackjack con tecniche di conteggio delle carte (film "21")

Essi furono poi banditi dai casinò: non permettono giochi favorevoli (!)

Giochi favorevoli?

È molto difficile avere la possibilità di giocare a un gioco favorevole

Ma non impossibile!

Negli anni '80 un gruppo di studenti del MIT riuscì a vincere molto denaro al blackjack con tecniche di conteggio delle carte (film "21")

Essi furono poi banditi dai casinò: non permettono giochi favorevoli (!)

> Asimmetria di informazione $\rightsquigarrow$ Avere più informazioni del "banco"

Bisogna essere molto bravi...

Giochi favorevoli?

È molto difficile avere la possibilità di giocare a un gioco favorevole

Ma non impossibile!

Negli anni '80 un gruppo di studenti del MIT riuscì a vincere molto denaro al blackjack con tecniche di conteggio delle carte (film "21")

Essi furono poi banditi dai casinò: non permettono giochi favorevoli (!)

Asimmetria di informazione $\rightsquigarrow$ Avere più informazioni del "banco"

Bisogna essere molto bravi. . . oppure agire in modo illegale

Giochi favorevoli?

È molto difficile avere la possibilità di giocare a un gioco favorevole

Ma non impossibile!

Negli anni '80 un gruppo di studenti del MIT riuscì a vincere molto denaro al blackjack con tecniche di conteggio delle carte (film "21")

Essi furono poi banditi dai casinò: non permettono giochi favorevoli (!)

> Asimmetria di informazione $\rightsquigarrow$ Avere più informazioni del "banco"

Bisogna essere molto bravi. . . oppure agire in modo illegale

- Insider trading

Giochi favorevoli?

È molto difficile avere la possibilità di giocare a un gioco favorevole

Ma non impossibile!

Negli anni '80 un gruppo di studenti del MIT riuscì a vincere molto denaro al blackjack con tecniche di conteggio delle carte (film "21")

Essi furono poi banditi dai casinò: non permettono giochi favorevoli (!)

Asimmetria di informazione $\rightsquigarrow$ Avere più informazioni del "banco"

Bisogna essere molto bravi... oppure agire in modo illegale

- Insider trading
- Eventi sportivi "truccati"

Giochi favorevoli?

È molto difficile avere la possibilità di giocare a un gioco favorevole

Ma non impossibile!

Negli anni '80 un gruppo di studenti del MIT riuscì a vincere molto denaro al blackjack con tecniche di conteggio delle carte (film "21")

Essi furono poi banditi dai casinò: non permettono giochi favorevoli (!)

> Asimmetria di informazione $\rightsquigarrow$ Avere più informazioni del "banco"

Bisogna essere molto bravi... oppure agire in modo illegale

- Insider trading
- Eventi sportivi "truccati"
- ...

Giochi sfavorevoli

Tipicamente scommesse e giochi – certamente tutti quelli d'azzardo – sono sfavorevoli per il giocatore: "in media" si perde

Giochi sfavorevoli

Tipicamente scommesse e giochi – certamente tutti quelli d'azzardo – sono sfavorevoli per il giocatore: "in media" si perde

(il Lotto è molto più sfavorevole della roulette!)

Giochi sfavorevoli

Tipicamente scommesse e giochi – certamente tutti quelli d'azzardo – sono sfavorevoli per il giocatore: "in media" si perde

(il Lotto è molto più sfavorevole della roulette!)

Perché giocare a un gioco sfavorevole?

Giochi sfavorevoli

Tipicamente scommesse e giochi – certamente tutti quelli d'azzardo – sono sfavorevoli per il giocatore: "in media" si perde

(il Lotto è molto più sfavorevole della roulette!)

Perché giocare a un gioco sfavorevole?

- Per divertirsi (Casinò $\simeq$ Gardaland)

Giochi sfavorevoli

Tipicamente scommesse e giochi – certamente tutti quelli d'azzardo – sono sfavorevoli per il giocatore: "in media" si perde

(il Lotto è molto più sfavorevole della roulette!)

Perché giocare a un gioco sfavorevole?

- Per divertirsi (Casinò $\simeq$ Gardaland)

  Attenzione alla dipendenza!

Giochi sfavorevoli

Tipicamente scommesse e giochi – certamente tutti quelli d'azzardo – sono sfavorevoli per il giocatore: "in media" si perde

(il Lotto è molto più sfavorevole della roulette!)

Perché giocare a un gioco sfavorevole?

- Per divertirsi (Casinò $\simeq$ Gardaland)

  Attenzione alla dipendenza!

- Per cautelarsi, ossia per "coprire" un rischio

Giochi sfavorevoli

Tipicamente scommesse e giochi – certamente tutti quelli d'azzardo – sono sfavorevoli per il giocatore: "in media" si perde

(il Lotto è molto più sfavorevole della roulette!)

Perché giocare a un gioco sfavorevole?

- Per divertirsi (Casinò $\simeq$ Gardaland)

  Attenzione alla dipendenza!

- Per cautelarsi, ossia per "coprire" un rischio

  Ogni polizza assicurativa (auto, casa, vita, . . .) è una "scommessa in un gioco sfavorevole", che tuttavia vale la pena fare!

Giocare o non giocare?

Abbiamo imparato una lezione importante

Giocare d'azzardo tante volte (sperando di vincere) è una cattiva idea

In un gioco sfavorevole, si è quasi certi di finire in bancarotta

Giocare o non giocare?

Abbiamo imparato una lezione importante

> Giocare d'azzardo tante volte (sperando di vincere) è una cattiva idea
>
> In un gioco sfavorevole, si è quasi certi di finire in bancarotta

Giocare poche volte, e/o senza l'obiettivo di vincere, è un altro discorso

Giocare o non giocare?

Abbiamo imparato una lezione importante

Giocare d'azzardo tante volte (sperando di vincere) è una cattiva idea

In un gioco sfavorevole, si è quasi certi di finire in bancarotta

Giocare poche volte, e/o senza l'obiettivo di vincere, è un altro discorso

SuperEnalotto (gioco molto sfavorevole)

Ha senso giocare 1€ per vincere, con probabilità bassissima, 1.000.000€?

Giocare o non giocare?

Abbiamo imparato una lezione importante

Giocare d'azzardo tante volte (sperando di vincere) è una cattiva idea

In un gioco sfavorevole, si è quasi certi di finire in bancarotta

Giocare poche volte, e/o senza l'obiettivo di vincere, è un altro discorso

SuperEnalotto (gioco molto sfavorevole)

Ha senso giocare 1€ per vincere, con probabilità bassissima, 1.000.000€?

Dipende!

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di
guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di

guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di
guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Se siete molto ricchi, è "facile" vincere 1.000€ (con qualche brivido...)

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di
guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Se siete molto ricchi, è "facile" vincere 1.000€ (con qualche brivido...)

Strategia del raddoppio (capitale iniziale 127.000€)

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di

guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Se siete molto ricchi, è "facile" vincere 1.000€ (con qualche brivido...)

Strategia del raddoppio (capitale iniziale 127.000€)

- Punto 1.000€ su "esce un numero rosso" (probabilità $\frac{18}{37} \approx 49\%$)

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di
guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Se siete molto ricchi, è "facile" vincere 1.000€ (con qualche brivido...)

Strategia del raddoppio (capitale iniziale 127.000€)

- Punto 1.000€ su "esce un numero rosso" (probabilità $\frac{18}{37} \approx 49\%$)
  Se esce rosso ricevo 2.000€ $\rightsquigarrow$ guadagno 1.000€ e mi fermo

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di

guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Se siete molto ricchi, è "facile" vincere 1.000€ (con qualche brivido...)

Strategia del raddoppio (capitale iniziale 127.000€)

- Punto 1.000€ su "esce un numero rosso" (probabilità $\frac{18}{37} \approx 49\%$)
  Se esce rosso ricevo 2.000€ $\rightsquigarrow$ guadagno 1.000€ e mi fermo
- Se non esce rosso, punto 2.000€ su "esce rosso al prossimo giro"

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di

guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Se siete molto ricchi, è "facile" vincere 1.000€ (con qualche brivido...)

Strategia del raddoppio (capitale iniziale 127.000€)

- Punto 1.000€ su "esce un numero rosso" (probabilità $\frac{18}{37} \approx 49\%$)
  Se esce rosso ricevo 2.000€ $\rightsquigarrow$ guadagno 1.000€ e mi fermo
- Se non esce rosso, punto 2.000€ su "esce rosso al prossimo giro"
  Se esce rosso ricevo 4.000€ $\rightsquigarrow$ guadagno 1.000€ e mi fermo

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di
guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...
...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Se siete molto ricchi, è "facile" vincere 1.000€ (con qualche brivido...)

Strategia del raddoppio (capitale iniziale 127.000€)

- Punto 1.000€ su "esce un numero rosso" (probabilità $\frac{18}{37} \approx 49\%$)
  Se esce rosso ricevo 2.000€ $\rightsquigarrow$ guadagno 1.000€ e mi fermo
- Se non esce rosso, punto 2.000€ su "esce rosso al prossimo giro"
  Se esce rosso ricevo 4.000€ $\rightsquigarrow$ guadagno 1.000€ e mi fermo
- Ogni volta che non esce rosso, raddoppio la puntata per guadagnare 1.000€

Un paradosso

Esiste una strategia di gioco alla roulette che permette di
guadagnare 1.000€ con probabilità 99% ...

...se siete disposti a rischiare di perdere 127.000€ con probabilità 1%

Se siete molto ricchi, è "facile" vincere 1.000€ (con qualche brivido...)

Strategia del raddoppio (capitale iniziale 127.000€)

- Punto 1.000€ su "esce un numero rosso" (probabilità $\frac{18}{37} \approx 49\%$)
  Se esce rosso ricevo 2.000€ $\rightsquigarrow$ guadagno 1.000€ e mi fermo
- Se non esce rosso, punto 2.000€ su "esce rosso al prossimo giro"
  Se esce rosso ricevo 4.000€ $\rightsquigarrow$ guadagno 1.000€ e mi fermo
- Ogni volta che non esce rosso, raddoppio la puntata per guadagnare 1.000€
  Se non esce rosso 7 volte di seguito (probabilità 1%) esaurisco il capitale!

Sommario

Probabilità e Matematica

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esiti possibili

Probabilità e Matematica

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esiti possibili

Per formalizzare la probabilità in matematica occorrono tre elementi:

1. L'insieme degli esiti possibili Ω (spazio campionario)

Probabilità e Matematica

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esiti possibili

Per formalizzare la probabilità in matematica occorrono tre elementi:

1. L'insieme degli esiti possibili Ω (spazio campionario)

- Roulette: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$

Probabilità e Matematica

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esiti possibili

Per formalizzare la probabilità in matematica occorrono tre elementi:

1. L'insieme degli esiti possibili Ω (spazio campionario)

- Roulette: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$
- Compleanni di 2 persone: $\Omega = \{\text{coppie } (x, y) \text{ di giorni dell'anno}\}$

Probabilità e Matematica

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esiti possibili

Per formalizzare la probabilità in matematica occorrono tre elementi:

1. L'insieme degli esiti possibili Ω (spazio campionario)

- Roulette: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$
- Compleanni di 2 persone: $\Omega = \{\text{coppie } (x, y) \text{ di giorni dell'anno}\}$

2. Gli eventi sono insiemi di esiti, ossia sottoinsiemi di Ω

Probabilità e Matematica

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esiti possibili

Per formalizzare la probabilità in matematica occorrono tre elementi:

1. L'insieme degli esiti possibili Ω (spazio campionario)

- Roulette: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$
- Compleanni di 2 persone: $\Omega = \{\text{coppie } (x, y) \text{ di giorni dell'anno}\}$

2. Gli eventi sono insiemi di esiti, ossia sottoinsiemi di Ω

- $A =$ "esce un numero pari" $= \{0, 2, 4, \ldots, 36\}$

Probabilità e Matematica

Consideriamo un esperimento con un numero finito di esiti possibili

Per formalizzare la probabilità in matematica occorrono tre elementi:

1. L'insieme degli esiti possibili Ω (spazio campionario)

- Roulette: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$
- Compleanni di 2 persone: $\Omega = \{\text{coppie } (x, y) \text{ di giorni dell'anno}\}$

2. Gli eventi sono insiemi di esiti, ossia sottoinsiemi di Ω

- A = "esce un numero pari" $= \{0, 2, 4, \ldots, 36\}$
- B = "le persone sono nate lo stesso giorno" $= \{(x, y) \text{ con } x = y\}$

Assiomi della Probabilità

3. Una probabilità è una *funzione*: a ogni evento A associa $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

Assiomi della Probabilità

3. Una probabilità è una *funzione*: a ogni evento A associa $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

Assiomi della probabilità:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$

Assiomi della Probabilità

3. Una probabilità è una *funzione*: a ogni evento A associa $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

Assiomi della probabilità:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cup B) \;=\; \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ se $A \cap B = \emptyset$ (additività)

Assiomi della Probabilità

3. Una probabilità è una *funzione*: a ogni evento A associa $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

Assiomi della probabilità:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cup B) \;=\; \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ se $A \cap B = \emptyset$ (additività)

- Assiomi universali, validi per ogni interpretazione

Assiomi della Probabilità

3. Una probabilità è una *funzione*: a ogni evento A associa $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

Assiomi della probabilità:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ se $A \cap B = \emptyset$ (additività)

- Assiomi universali, validi per ogni interpretazione
- Diverse scelte possibili per $\mathbb{P}$. Ad esempio probabilità uniforme:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Assiomi della Probabilità

3. Una probabilità è una *funzione*: a ogni evento A associa $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$

Assiomi della probabilità:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ se $A \cap B = \emptyset$ (additività)

- Assiomi universali, validi per ogni interpretazione
- Diverse scelte possibili per $\mathbb{P}$. Ad esempio probabilità uniforme:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Una variabile aleatoria è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Proprietà della Probabilità

La probabilità gode di numerose proprietà:

- Se $A \subseteq B$ allora $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Proprietà della Probabilità

La probabilità gode di numerose proprietà:

- Se $A \subseteq B$ allora $\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Proprietà della Probabilità

La probabilità gode di numerose proprietà:

- Se $A \subseteq B$ allora $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\ldots$

Proprietà della Probabilità

La probabilità gode di numerose proprietà:

- Se $A \subseteq B$ allora $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\ldots$

Tutte queste proprietà discendono logicamente dagli assiomi!

Proprietà della Probabilità

La probabilità gode di numerose proprietà:

- Se $A \subseteq B$ allora $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- ...

Tutte queste proprietà discendono logicamente dagli assiomi!

Questo approccio assiomatico "astratto" è molto potente

Ha connessioni con la geometria, in particolare con il concetto di area

Il concetto di area

- Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ il piano euclideo

Il concetto di area

- Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ il piano euclideo
- Le figure piane (triangolo, cerchio, ...) sono sottoinsiemi di Ω

Il concetto di area

- Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ il piano euclideo
- Le figure piane (triangolo, cerchio, ...) sono sottoinsiemi di Ω
- Per ogni figura $A \subseteq \Omega$, indichiamone con $\mathbb{P}(A)$ l'area

Il concetto di area

- Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ il piano euclideo
- Le figure piane (triangolo, cerchio, . . .) sono sottoinsiemi di Ω
- Per ogni figura $A \subseteq \Omega$, indichiamone con $\mathbb{P}(A)$ l'area

L'area $\mathbb{P}$ soddisfa la proprietà di additività:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$

Il concetto di area

- Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ il piano euclideo
- Le figure piane (triangolo, cerchio, ...) sono sottoinsiemi di Ω
- Per ogni figura $A \subseteq \Omega$, indichiamone con $\mathbb{P}(A)$ l'area

L'area $\mathbb{P}$ soddisfa la proprietà di additività:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$

- Le proprietà della probabilità valgono per l'area delle figure piane (e per il volume dei solidi)

Il concetto di area

- Sia $\Omega = \mathbb{R}^2$ il piano euclideo
- Le figure piane (triangolo, cerchio, ...) sono sottoinsiemi di Ω
- Per ogni figura $A \subseteq \Omega$, indichiamone con $\mathbb{P}(A)$ l'area

L'area $\mathbb{P}$ soddisfa la proprietà di additività:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$

- Le proprietà della probabilità valgono per l'area delle figure piane (e per il volume dei solidi)
- Concetti all'apparenza distanti (probabilità, area e volume) hanno alla base la stessa struttura matematica, detta Teoria della Misura

Un po' di storia

I primi calcoli con probabilità uniforme (giochi d'azzardo) risalgono al '500-'600 con Cardano, Galileo, Pascal, Fermat, Huygens

La probabilità fu ulteriormente sviluppata nel '700-'800 da Jakob Bernoulli, de Moivre, Laplace, Bayes, . . .

Un po' di storia

I primi calcoli con probabilità uniforme (giochi d'azzardo) risalgono al '500-'600 con Cardano, Galileo, Pascal, Fermat, Huygens

La probabilità fu ulteriormente sviluppata nel '700-'800 da Jakob Bernoulli, de Moivre, Laplace, Bayes, ...

Una teoria sistematica e completa, capace di trattare anche spazi campionari Ω infiniti, fu sviluppata solo nella prima metà del '900

Un po' di storia

I primi calcoli con probabilità uniforme (giochi d'azzardo) risalgono al '500-'600 con Cardano, Galileo, Pascal, Fermat, Huygens

La probabilità fu ulteriormente sviluppata nel '700-'800 da Jakob Bernoulli, de Moivre, Laplace, Bayes, ...

Una teoria sistematica e completa, capace di trattare anche spazi campionari Ω infiniti, fu sviluppata solo nella prima metà del '900

Il maggiore artefice fu Kolmogorov, che capì l'importanza dei lavori di Borel e Lebesgue sul concetto di area e sulla teoria della misura

Un po' di storia

I primi calcoli con probabilità uniforme (giochi d'azzardo) risalgono al '500-'600 con Cardano, Galileo, Pascal, Fermat, Huygens

La probabilità fu ulteriormente sviluppata nel '700-'800 da Jakob Bernoulli, de Moivre, Laplace, Bayes, ...

Una teoria sistematica e completa, capace di trattare anche spazi campionari Ω infiniti, fu sviluppata solo nella prima metà del '900

Il maggiore artefice fu Kolmogorov, che capì l'importanza dei lavori di Borel e Lebesgue sul concetto di area e sulla teoria della misura

Diedero contributi importanti altri matematici quali Markov, Kintchine, Lévy, Cantelli, De Finetti, ...

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di n persone scelte casualmente

Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di n persone scelte casualmente
Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

- Sia $A :=$ "due persone hanno lo stesso compleanno"

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di n persone scelte casualmente
Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

- Sia $A :=$ "due persone hanno lo stesso compleanno"
- $A^c =$ "tutte le persone hanno compleanni distinti"

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di n persone scelte casualmente
Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

- Sia $A :=$ "due persone hanno lo stesso compleanno"
- $A^c =$ "tutte le persone hanno compleanni distinti"

Allora $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ e resta da calcolare $\mathbb{P}(A^c)$.

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di n persone scelte casualmente

Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

- Sia $A :=$ "due persone hanno lo stesso compleanno"
- $A^c =$ "tutte le persone hanno compleanni distinti"

Allora $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ e resta da calcolare $\mathbb{P}(A^c)$.

Si può procedere in due modi:

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di n persone scelte casualmente
Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

- Sia $A :=$ "due persone hanno lo stesso compleanno"
- $A^c =$ "tutte le persone hanno compleanni distinti"

Allora $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ e resta da calcolare $\mathbb{P}(A^c)$.

Si può procedere in due modi:

1. Indipendenza $$\mathbb{P}(A^c) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365}$$

Il paradosso dei compleanni

Consideriamo un gruppo di n persone scelte casualmente
Qual è la probabilità che due di esse abbiano lo stesso compleanno?

- Sia $A :=$ "due persone hanno lo stesso compleanno"
- $A^c =$ "tutte le persone hanno compleanni distinti"

Allora $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ e resta da calcolare $\mathbb{P}(A^c)$.

Si può procedere in due modi:

1. Indipendenza $\quad \mathbb{P}(A^c) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365}$
2. Spazio campionario $\quad \Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\; n \text{ giorni dell'anno} \}$

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{\#A^c}{\#\Omega} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-(n-1))}{365 \cdot 365 \cdot 365 \quad \cdots \quad 365}$$

Una formula approssimata

Abbiamo mostrato che

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365}$$

Una formula approssimata

Abbiamo mostrato che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c) &= 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365} \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n-1)}{365}\right)\end{aligned}$$

Una formula approssimata

Abbiamo mostrato che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c) &= 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365} \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n-1)}{365}\right)\end{aligned}$$

Usando l'approssimazione $e^{-x} \approx 1 - x$ otteniamo

Una formula approssimata

Abbiamo mostrato che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c) &= 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365} \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n-1)}{365}\right)\end{aligned}$$

Usando l'approssimazione $e^{-x} \approx 1 - x$ otteniamo

$$\approx 1 \cdot e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdots e^{-\frac{(n-1)}{365}}$$

Una formula approssimata

Abbiamo mostrato che

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365}$$

$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n-1)}{365}\right)$$

Usando l'approssimazione $e^{-x} \approx 1 - x$ otteniamo

$$\approx 1 \cdot e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdots e^{-\frac{(n-1)}{365}}$$

$$= e^{-\left(\frac{1}{365} + \frac{2}{365} + \ldots + \frac{(n-1)}{365}\right)}$$

Una formula approssimata

Abbiamo mostrato che

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365}$$
$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n-1)}{365}\right)$$

Usando l'approssimazione $e^{-x} \approx 1 - x$ otteniamo

$$\approx 1 \cdot e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdots e^{-\frac{(n-1)}{365}}$$
$$= e^{-\left(\frac{1}{365} + \frac{2}{365} + \ldots + \frac{(n-1)}{365}\right)} = e^{-\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{365}}$$

Una formula approssimata

Abbiamo mostrato che

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365}$$
$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n-1)}{365}\right)$$

Usando l'approssimazione $e^{-x} \approx 1 - x$ otteniamo

$$\approx 1 \cdot e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdots e^{-\frac{(n-1)}{365}}$$
$$= e^{-\left(\frac{1}{365} + \frac{2}{365} + \ldots + \frac{(n-1)}{365}\right)} = e^{-\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{365}}$$
$$= e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$$

dove abbiamo usato la formula $\quad 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad$ (Gauss!)

Sommario

Conclusioni

- I fenomeni casuali possono essere descritti, e in parte compresi, mediante la matematica

Conclusioni

- I fenomeni casuali possono essere descritti, e in parte compresi, mediante la matematica
- Teoria elegante e "astratta", ma con svariate applicazioni concrete

Conclusioni

- I fenomeni casuali possono essere descritti, e in parte compresi, mediante la matematica
- Teoria elegante e “astratta”, ma con svariate applicazioni concrete
- Abbiamo solo intravisto la punta dell’iceberg!

Conclusioni

- I fenomeni casuali possono essere descritti, e in parte compresi, mediante la matematica
- Teoria elegante e "astratta", ma con svariate applicazioni concrete
- Abbiamo solo intravisto la punta dell'iceberg!
- La probabilità è connessa alla statistica e alla scienza dei dati, di cui vi parlerà tra poco Mauro

Grazie

Sommario

Un problema concreto (Galton, Darwin, 1876)

Vogliamo determinare l'efficacia di un trattamento rinforzante

Misuriamo l'altezza di 15 piante sottoposte al trattamento, ottenendo i valori (riordinati) $x_1 > x_2 > \ldots > x_{15}$

Un problema concreto (Galton, Darwin, 1876)

Vogliamo determinare l'efficacia di un trattamento rinforzante

Misuriamo l'altezza di 15 piante sottoposte al trattamento, ottenendo i valori (riordinati) $x_1 > x_2 > \ldots > x_{15}$

Misuriamo anche l'altezza di 15 piante non trattate (gruppo di controllo), ottenendo i valori $y_1 > y_2 > \ldots > y_{15}$

Un problema concreto (Galton, Darwin, 1876)

Vogliamo determinare l'efficacia di un trattamento rinforzante

Misuriamo l'altezza di 15 piante sottoposte al trattamento, ottenendo i valori (riordinati) $x_1 > x_2 > \ldots > x_{15}$

Misuriamo anche l'altezza di 15 piante non trattate (gruppo di controllo), ottenendo i valori $y_1 > y_2 > \ldots > y_{15}$

Introduciamo la quantità $R := \#\{i \leq 15 \text{ tali che } x_i > y_i\}$

Un problema concreto (Galton, Darwin, 1876)

Vogliamo determinare l'efficacia di un trattamento rinforzante

Misuriamo l'altezza di 15 piante sottoposte al trattamento, ottenendo i valori (riordinati) $x_1 > x_2 > \ldots > x_{15}$

Misuriamo anche l'altezza di 15 piante non trattate (gruppo di controllo), ottenendo i valori $y_1 > y_2 > \ldots > y_{15}$

Introduciamo la quantità $R := \#\{i \leq 15 \text{ tali che } x_i > y_i\}$

Nell'esperimento di Darwin $R = 13$

Questa è una forte indicazione che il trattamento è efficace. O no?

Un problema concreto (Galton, Darwin, 1876)

Riuniamo i dati x_i e y_i in un'unica sequenza $z_1 > z_2 > \ldots > z_{30}$

Se il trattamento non avesse alcun effetto, l'ordine in cui compaiono le x_i e le y_i dovrebbe essere completamente casuale

Un problema concreto (Galton, Darwin, 1876)

Riuniamo i dati x_i e y_i in un'unica sequenza $z_1 > z_2 > \ldots > z_{30}$

Se il trattamento non avesse alcun effetto, l'ordine in cui compaiono le x_i e le y_i dovrebbe essere completamente casuale

Questo è strettamente connesso al modello della passeggiata aleatoria, per cui si può calcolare $\mathbb{P}(R \geq 13) = \frac{3}{16} \simeq 19\%$

Un problema concreto (Galton, Darwin, 1876)

Riuniamo i dati x_i e y_i in un'unica sequenza $z_1 > z_2 > \ldots > z_{30}$

Se il trattamento non avesse alcun effetto, l'ordine in cui compaiono le x_i e le y_i dovrebbe essere completamente casuale

Questo è strettamente connesso al modello della passeggiata aleatoria, per cui si può calcolare $\mathbb{P}(R \geq 13) = \frac{3}{16} \simeq 19\%$

Un trattamento inefficace avrebbe dato un esito uguale o migliore di quello osservato con probabilità 19% (quasi una volta su cinque!)

Un problema concreto (Galton, Darwin, 1876)

Riuniamo i dati x_i e y_i in un'unica sequenza $z_1 > z_2 > \ldots > z_{30}$

Se il trattamento non avesse alcun effetto, l'ordine in cui compaiono le x_i e le y_i dovrebbe essere completamente casuale

Questo è strettamente connesso al modello della passeggiata aleatoria, per cui si può calcolare $\mathbb{P}(R \geq 13) = \frac{3}{16} \simeq 19\%$

Un trattamento inefficace avrebbe dato un esito uguale o migliore di quello osservato con probabilità 19% (quasi una volta su cinque!)

È importante avere un modello di riferimento per una valutazione quantitativa (e la passeggiata aleatoria è spesso un ottimo candidato)

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

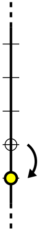
- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.



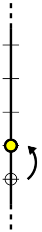
C

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.



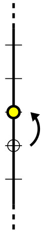
C T

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.



C T T

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

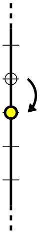
C T T T

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.



C T T T C

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

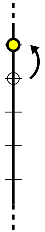
C T T T C T

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.



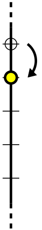
C T T T C T T

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.



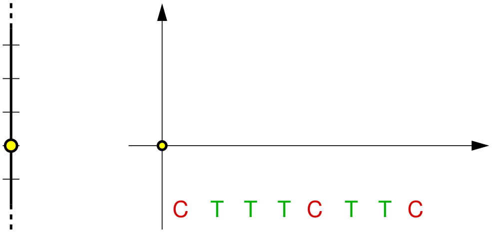
C T T T C T T C

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

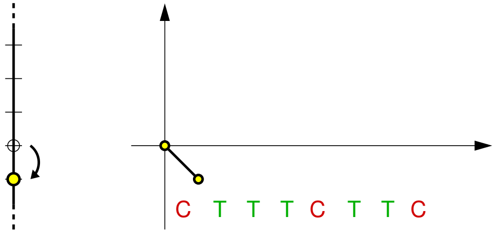


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

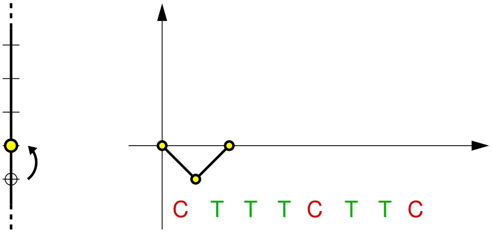


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

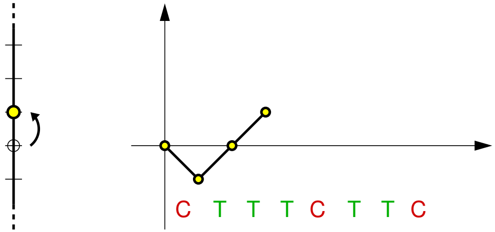


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

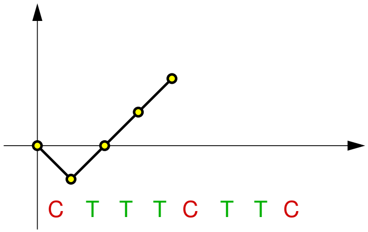


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

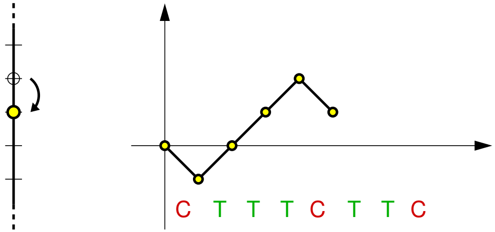


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

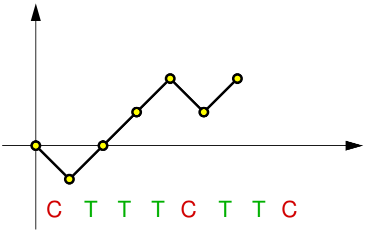


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

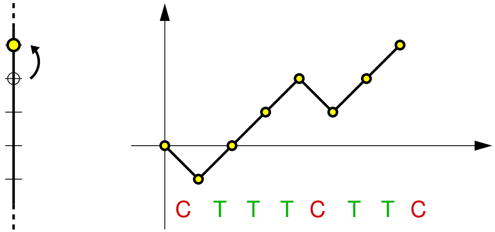


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

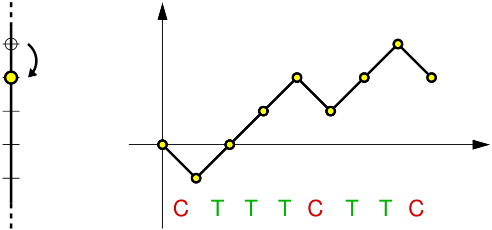


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.

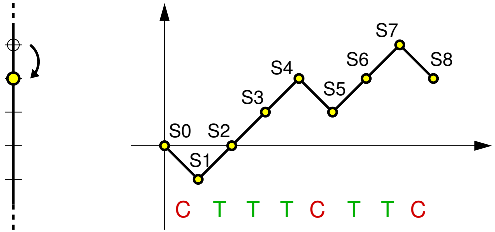


La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.



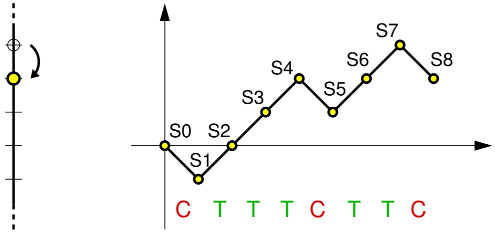
$S_N :=$ posizione della pulce dopo N salti

La passeggiata aleatoria

Il più semplice moto casuale (tempo e spazio discreto).

Ogni secondo, una pulce lancia una moneta equilibrata:

- se esce testa (T), fa un salto in avanti;
- se esce croce (C), fa un salto indietro.



$$S_N := \text{posizione della pulce dopo } N \text{ salti}$$
$$= \text{numero di T meno numero di C dopo } N \text{ lanci}$$

Interpretazioni alternative

Invece che a una pulce, possiamo pensare a un giocatore d'azzardo

Interpretazioni alternative

Invece che a una pulce, possiamo pensare a un giocatore d'azzardo

Ad ogni istante si lancia una moneta equilibrata:

T $\rightarrow$ il giocatore vince 1€ C $\rightarrow$ il giocatore perde 1€

Interpretazioni alternative

Invece che a una pulce, possiamo pensare a un giocatore d'azzardo

Ad ogni istante si lancia una moneta equilibrata:

T $\rightarrow$ il giocatore vince 1€ C $\rightarrow$ il giocatore perde 1€

Il guadagno (con segno!) del giocatore dopo N giocate vale proprio

$$S_N = \text{numero di T meno numero di C}$$

Interpretazioni alternative

Invece che a una pulce, possiamo pensare a un giocatore d'azzardo

Ad ogni istante si lancia una moneta equilibrata:

T $\to$ il giocatore vince 1€ C $\to$ il giocatore perde 1€

Il guadagno (con segno!) del giocatore dopo N giocate vale proprio

$$\begin{aligned} S_N &= \text{numero di T meno numero di C} \\ &= \text{posizione della pulce al tempo } N \end{aligned}$$

Interpretazioni alternative

Invece che a una pulce, possiamo pensare a un giocatore d'azzardo

Ad ogni istante si lancia una moneta equilibrata:

T $\rightarrow$ il giocatore vince 1€ C $\rightarrow$ il giocatore perde 1€

Il guadagno (con segno!) del giocatore dopo N giocate vale proprio

$$\begin{aligned} S_N &= \text{numero di T meno numero di C} \\ &= \text{posizione della pulce al tempo } N \end{aligned}$$

La passeggiata aleatoria è un modello semplice, ma tutt'altro che banale

Usata in diversi ambiti, dalla fisica all'economia, dall'ecologia alla biologia