Correlazioni tra competenza linguistica e capacità di lavoro su un testo matematico: gli studenti del Liceo Scientifico alle prese con le prove dell'Esame di Stato

Giorgio Bolondi[1], Laura Branchetti[2], Federica Ferretti[1]
[1]Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
[2]Università degli Studi di Palermo

1. Introduzione

La *componente comunicativa* dell'apprendimento in matematica è considerata, in molti quadri teorici di riferimento, una delle componenti cruciali della competenza matematica. I processi coinvolti (decodifica, interpretazione, riconoscimento, sintetizzazione, presentazione, spiegazione, giustificazione) sono ovviamente collegati alle competenze linguistiche in senso ampio e sono correntemente considerati fondamentali dagli insegnanti di matematica, senza però essere abitualmente valutati mediante specifici strumenti, o considerati esplicitamente e organicamente nel processo di valutazione formativa degli allievi.

Nella seconda prova scritta dell'Esame di Stato per il Liceo Scientifico (il momento più avanzato per la valutazione della matematica nella scuola italiana) gli studenti devono produrre un testo matematico in risposta a problemi (articolati in diversi punti) e quesiti, e la normativa prevede che la prova valuti espressamente le *capacità logiche e argomentative*. Gli elaborati di questa seconda prova sono quindi il materiale ideale *(high stake*) su cui condurre uno studio su come questa competenza comunicativa si manifesta in un contesto di *advanced mathematical thinking*.

Nel 2010 l'Invalsi ha raccolto, per un campione di studenti dei Licei Scientifici, gli elaborati relativi alla prima prova scritta (Italiano) e alla seconda prova scritta (matematica dell'esame di Stato. Questi elaborati sono stati ricorretti e analizzati attraverso griglie di correzione elaborate da due gruppi di ricerca, coordinati rispettivamente dal prof. Luca Serianni e dal prof. Giorgio Bolondi.

Per ogni item del problema e per ogni quesito la maschera di matematica prevedeva una sequenza di domande di cui alcune specifiche riguardanti l'organizzazione della risposta al quesito, e altre su caratteristiche riconducibili alle capacità logiche e argomentative, emergenti nella risposta al quesito.

In entrambe le ricorrezioni i correttori hanno utilizzato la tecnica *multicolor* per evidenziare i punti fondamentali da rilevare; ad esempio per indicare la presenza (o l'utilizzo improprio, scorretto o inadeguato) di parole chiave del ragionamento deduttivo (*se...allora*; *essendo.... si ha*; *dato che....*) o il richiamo esplicito di definizioni e teoremi.

2. Il quadro teorico di riferimento

Fandiño Pinilla (2008) mostra come, nonostante la matematica sia una e quindi l’apprendimento della matematica sia un fatto unitario, sia possibile distinguere diverse componenti dell’apprendimento (concettuale, algoritmica, semiotica, comunicativa, strategica). Sebbene esse non siano prive di sovrapposizioni e intrecci, sono comunque riconducibili a diversi ambiti cognitivi e perciò sono distinguibili. Nel caso in esame il focus sarà posto sull’apprendimento comunicativo e sull’apprendimento della gestione delle trasformazioni semiotiche.

Per esaminare gli elaborati degli studenti nel testo di matematica non si può di certo fare riferimento al solo linguaggio verbale, nemmeno se ci si concentra sugli aspetti prettamente linguistici. Nella produzione del testo matematico si attinge infatti ad un bacino di risorse ben più ampio. In particolare in matematica è sempre necessario rappresentare oggetti che, per la natura stessa della disciplina, non sono reali e concreti e non rendono possibili rinvii ostensivi. Ogni oggetto matematico deve perciò essere rappresentato mediante una rappresentazione semiotica all'interno di un registro semiotico, cioè un sistema di simboli e regole di manipolazione dei simboli che consentano tre attività: comunicazione (lasciare una traccia sensibile che consenta l'identificazione di un oggetto), trattamento (trasformare la rappresentazione semiotica con regole interne al registro) e conversione (effettuare una trasformazione di rappresentazione semiotica da un registro ad un altro) (Duval, 1995). Oltre al registro verbale è perciò comune e talvolta necessario fare uso, all'interno del testo, di rappresentazioni in altri registri (grafici, tabelle, equazioni, …). Il testo matematico ha quindi la peculiarità di non essere un insieme di parole, ma un più complesso prodotto che coinvolge diversi registri semiotici particolarmente adatto alla didattica laboratoriste della scrittura. Queste attività sono diventate occasione di riflessione sulla scrittura e la comunicazione scientifica nei suoi vari aspetti (gestione della terminologia scientifica, modelli di scrittura, rapporto tra struttura testuale ed efficacia di comprensione, scrittura collettiva), allo scopo di dar forma a percorsi di didattica della scrittura trasversali alle discipline e collegati ad esperienze scientifiche da riprodurre in classe.

Anche le disposizioni ministeriali[1] prevedono che una delle tre direzioni di valutazione della prova scritta di matematica

---

1

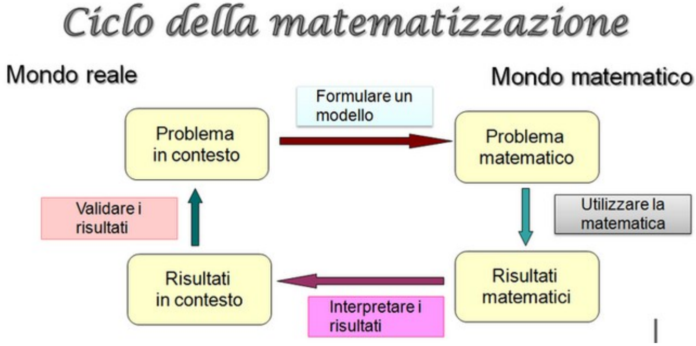
Ministero della Pubblica Istruzione, il 4 ottobre 2000, ha pubblicato sul proprio sito Internet notizia della nuova struttura della seconda prova di matematica. Si veda in proposito: http://archivio.invalsi.it/ones2000/pagine/mat2prova.htm.

dell'Esame di Stato sia quella delle *capacità logiche e argomentative.*

L'importanza di queste capacità e dell'apprendimento comunicativo emerge anche dal ruolo cruciale che esse assumono all'interno dei framezzato delle valutazioni internazionali. All'interno delle Metamatematica *Applicabilità* del quadro di riferimento per la Matematica della rilevazione OCSE Pisa 2012 (OECD, 2013) compaiono sia la voce *comunicazione* che la voce *ragionamento e argomentazione*. In dettaglio, all'interno del *framezzato* di Matematica, vengono distinti tre momenti fondamentali dell'attività di risoluzione di un problema (*mathematical processore*):

- il momento della formulazione (*formulatine*)
- il momento dell'utilizzo della matematica (*implosione*)
- il momento dell'interpretazione (*interpretino*).

Questi tre verbi (utilizzati nella definizione di competenza (OECD, 2013)) individuano i processi che gli studenti mettono in campo quando risolvono problemi legati ad un contesto e il ruolo di questi processi nelle attività matematiche è rappresentato nello schema seguente che riproduce il ciclo della matematizzazione (Metamatematica *eracliteo in praticacce*):



Questi processi sono anche messi in relazione con le abilità matematiche e, come possiamo notare dalla tabella sottostante, l'abilità comunicativa e quella di ragionare e argomentare sono presenti trasversalmente in ogni momento del *ciclo della mate-*

matizzazione e vengono declinate esplicitamente in ciascun processo:

	Dare una rappresentazione di una situazione utilizzando la matematica (*formulate*)	**Impiegare concetti, fatti, procedure e ragionamenti matematici** (*employ*)	**Interpretare, applicare e valutare risultati matematici** (*interpret*)
Comunicare	Leggere, decodificare e dare un senso ad affermazioni, domande, compiti, oggetti, immagini o animazioni (nella somministrazione al computer) per costruire un modello mentale della situazione	Articolare una soluzione, mostrare il lavoro richiesto per raggiungere una soluzione e/o riassumere e presentare risultati matematici	Costruire e comunicare le spiegazioni e le argomentazioni nel contesto del problema

	Dare una rappresentazione di una situazione utilizzando la matematica (*formulate*)	**Impiegare concetti, fatti, procedure e ragionamenti matematici** (*employ*)	**Interpretare, applicare e valutare risultati matematici** (*interpret*)
Ragionamento e argomentazione	Spiegare, sostenere, o fornire una giustificazione della rappresentazione individuata o ideata di una situazione del mondo reale	Spiegare, sostenere, o fornire una giustificazione per i processi e le procedure utilizzate per determinare un risultato o una soluzione matematica. Collegare pezzi di informazioni per arrivare ad una soluzione matematica, fare generalizzazioni o fornire argomenti a più stadi (multi –step)	Riflettere sulle soluzioni matematiche e fornire spiegazioni e argomenti che sostengano, confutino, o validino una soluzione matematica ad un problema del mondo reale

Come possiamo notare, le capacità logico-argomentative si esplicitano nelle diverse fasi del ciclo della matematizzazione, in particolare nel fornire, spiegare e difendere giustificazioni dei propri modelli, delle strategie risolutive e delle soluzioni trovate, nel collegare informazioni, nell'organizzare argomentazioni articolate in più fasi e nel riconoscere una soluzione corretta. Tutti questi momenti passano inevitabilmente attraverso il linguaggio.

Nella parte di analisi qualitativa di questa ricerca abbiamo scelto di mettere a fuoco l'analisi dei testi degli studenti del campione di riferimento attraverso uno dei costrutti centrali della didattica della matematica: il *contratto didattico*, concetto elaborato negli anni '80 a seguito di alcuni lavori fondazionali di Guy Brousseau. Una delle sue prime definizioni è la seguente:
«*In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico*» (Brousseau, 1986)
Questo costrutto ha avuto negli anni diverse interpretazioni (Sarrazy, 1995) ed è sempre più diventato un'ottima chiave interpretativa del comportamento degli allievi. In particolare in questa ricerca, come vedremo, sono emersi alcuni atteggiamenti legati a fenomeni di contratto didattico strettamente intrecciati agli approcci linguistici degli studenti.

3. La metodologia della ricerca.

La metodologia dell'indagine ha previsto la ricorrezione degli elaborati della seconda prova scritta di matematica per un campione di studenti selezionato dall'Invalsi. In parallelo, una analoga ricorrezione veniva effettuata sulle prime prove scritte (Italiano) dei medesimi studenti. La ricorrezione, coordinata dagli autori dell'articolo, ha coinvolto un gruppo di 24 studenti di Didattica della matematica dell'Università di Bologna. Le maschere di correzione, differenziate per studenti di Liceo scientifico PNI e di ordinamento, sono strutturate in analogia con la maschera adottata dal gruppo di Italiano di modo da rendere confrontabili i risultati delle due indagini.

La maschera è composta di due parti: una più puntuale, riguardante i singoli quesiti e il problema, e una trasversale. Per ogni item del problema e per ogni quesito, la maschera prevede:

tre domande generali inerenti lo svolgimento e la correzione del singolo quesito o item;

alcune domande specifiche, inerenti le richieste del quesito o dell'item mirate a evidenziare aspetti significativi per l'individuazione delle capacità logiche e argomentative;

due domande specifiche sulla produzione del testo matematico da parte degli studenti;

una domanda conclusiva riguardante il giudizio del correttore sulle capacità logiche e argomentative

I correttori hanno attribuito un valore agli indicatori trasversali su apposite scale. Gli indicatori sono stati poi raggruppati in 11 indicatori sintetici che consentissero di confrontare gli elaborati degli studenti del campione, indipendentemente dalle scelte compiute in fase di selezione dei quesiti: correttezza del problema/quesito, coerenza nella concatenazione dei passaggi nel problema/quesito, utilizzo di parole chiave nel problema, giudizio complessivo sulle capacità logiche e deduttive esplicitate nel problema.

Per quanto riguarda la parte trasversale, si è scelto di articolare, per individuare le caratteristiche del testo matematico, le medesime componenti definite per la maschera di ricorrezione della prima prova scritta:

T (competenze testuali). Gli indicatori della competenza testuale intendono rilevare la capacità di organizzare un discorso matematico complessivamente coerente; si è cercato quindi di trovare indicatori che permettessero di rilevare le caratteristiche specifiche di un elaborato di matematica, per quanto riguarda l’organizzazione e l’articolazione del testo. Gli indicatori presenti nella maschera sono i seguenti:

T1: Dichiara esplicitamente, all'inizio dello svolgimento o nel corso della risoluzione, cosa sta facendo?

T2: Enuncia esplicitamente le strategie di risoluzione che adotta?

T3: Utilizza ordinatamente i dati forniti nel testo?

T4: Risponde esplicitamente alle consegne poste?

T5: Il testo nel suo complesso è organizzato adeguatamente?

L (competenze lessicali). Gli indicatori della competenza lessicale-semantica intendono rilevare la disponibilità di risorse specifiche del linguaggio matematico, tenendo conto della coesistenza e dell’intreccio di diversi tipi di linguaggio: quello della logica matematica (connettivi, implicazioni, deduzioni), linguaggio naturale e un terzo tipo di linguaggio; il cosiddetto “matematichese”, una sorta di linguaggio burocratico proprio della matematica, usato spesso dagli studenti senza controllo critico; il linguaggio tabellare e linguaggio grafico. Gli indicatori presenti nella maschera sono i seguenti:

L1: C'è una coerenza complessiva nell'uso della terminologia e dei simboli?

L2: Utilizza i simboli dei connettivi e dei quantificatori?

L3: Utilizza rappresentazioni tabellari?

L4: Richiama esplicitamente delle definizioni?

L5: Utilizza correttamente nel contesto del problema matematico il linguaggio naturale?

L6: C'è uso improprio di linguaggio "matematichese"?

G (competenze grammaticali): Il parallelo in matematica di una buona competenza grammaticale (uso delle strutture grammaticali e del sistema ortografico e interpuntivo) può essere individuato essenzialmente in un utilizzo delle sue strutture sintatticamente corretto e coerente, al fine di costruire un discorso matematico articolato. Gli indicatori presenti nella maschera sono i seguenti:

G1: Cita correttamente dei teoremi nel corso delle argomentazioni?

G2: Utilizza argomentazioni grafiche?

G3: Utilizza correttamente, anche solo verbalmente, connettivi logici (se...allora)?

G4: Utilizza correttamente, anche solo verbalmente, i quantificatori?

G5: Mostra di utilizzare ove opportuno strumenti di calcolo?

G6: Sceglie in modo pertinente esempi e controesempi, a sostegno delle proprie affermazioni?

G7: Sono presenti calcoli inutili? endo dal presupposto condiviso che il linguaggio gioca un ruolo fondamentale nello sviluppo delle competenze matematiche, il laboratorio è consistito in attività comuni tra insegnanti di italiano e di matematica. Si è concentrato tra le altre cose sull'analisi linguistica e comunicativa di testi matematici, sia usati nella didattica sia prodotti dai ragazzi, con l'obiettivo di rendere consapevoli gli insegnanti delle difficoltà linguistiche e concettuali che possono interferire nell'apprendimento, in vista di attività da riprodurre in classe.

4. **L'Analisi quantitativa.**

L'analisi delle percentuali dei 18 indicatori trasversali di competenza, per ciascuno dei due gruppi (ordinamento o PNI) ha portato ai seguenti risultati percentuali:

	T1	T2	T3	T4	T5
PNI	44%	41%	98%	67%	73%
ORD	26%	34%	87%	62%	5%

Tab. 1 Competenze "testuali"

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
PNI	50%	64%	38%	17%	82%	8%	29%

ORD	26%	61%	32%	23%	72%	6%	39%

Tab. 2 Competenze "grammaticali"

	L1	L2	L3	L4	L5	L6
PNI	58%	23%	50%	26%	82%	10%
ORD	72%	34%	29%	19%	49%	26%

Tab. 3 Competenze "lessicali e semantiche"

Gli Indicatori complessivi della prima parte sono risultati i seguenti (media su massimo di 5 punti per i quesiti, 2 per il problema)

	Correttezza	Coerenza
PNI	1,82	2,7
ORD	2,73	3,4

Tab. 4 Indicatori relativi ai quesiti

	Correttezza	Coerenza
PNI	1,8	2,51
ORD	1,6	1,99

Tab. 5 Indicatori relativi ai problemi

Il confronto tra le valutazioni finali degli insegnanti e gli indicatori rilevati dai correttori mostra una scarsa relazione (talvolta negativa) tra la valutazione e un analisi puntale delle capacità logico-argomentative misurate con questa maschera di ricorrezione.

Gli studenti PNI hanno risultati migliori rispetto a quelli di ordinamento su quasi tutti gli indicatori trasversali . Gli indicatori G7 e L6 rilevano calcoli inutili e linguaggio inutilmente tecnico-formale, quindi una percentuale minore corrisponde a un risultato migliore. Tra gli indicatori trasversali, il T3 ("Utilizza ordinatamente i dati forniti nel testo") è stato il più selezionato e caratterizza complessivamente quasi il 90% degli studenti, mentre invece la percentuale più bassa riguarda G6: “Sceglie in modo pertinente esempi e controesempi, a sostegno delle proprie affermazioni” (meno del 7% degli studenti). L'elevatissima percentuale per l'indicatore T3 segnala un atteggiamento assai diffuso tra gli studenti e non necessariamente positivo per le produzioni in matematica a differenza del testo di italiano. Gli studenti che utilizzano ordinatamente i dati del testo spesso lo fanno infatti spesso in modo acritico e cercando di individuare l'algoritmo che consenta di risolvere il problema usando i dati senza controllo semantico (effetto *età del* capitano). Il valore percentuale di G6 fa emergere nettamente la scarsa abitudine degli studenti italiani di Liceo scientifico a fornire esempi e controesempi a supporto delle proprie affermazioni.

I valori di T1 e T2 (“Dichiara esplicitamente, all'inizio dello svolgimento o nel corso della risoluzione, cosa sta facendo?”; “Enuncia esplicitamente le strategie di risoluzione che adotta?”) mostrano che nella prova di matematica più della metà degli studenti del campione non fa ricorso nemmeno una volta ad affermazioni che ne esplicitino le intenzioni né che consentano al lettore di comprendere quali strategie siano messe in campo, su quali teoremi siano fondate le affermazioni, quali *steps* si intendono seguire per giungere alla soluzione.

La performance è bassa anche rispetto all'indicatore L4 (utilizzo esplicito delle definizioni). L’indicatore G7 segnala la presenza di un elevato numeri di studenti che fa ricorso a calcoli inutili. Si può ipotizzare che questi servano in qualche modo a compensare la mancanza di argomentazione.

5. L'Analisi qualitativa dei protocolli.

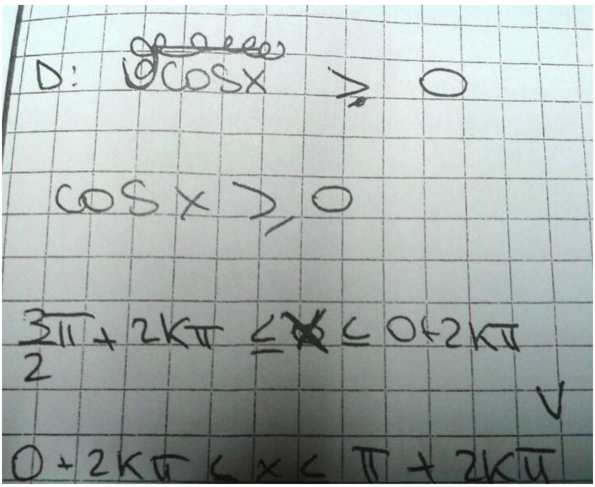
“Testi senza parole”

L'analisi degli elaborati ha messo in luce la presenza di una grande quantità di una particolare categoria di testi matematici, che si possono definire "testi senza parole": elaborati in cui si susseguono disegni, formule algebriche e grafici trasformati l'uno nell'altro e manipolati semioticamente senza alcun ricorso al linguaggio naturale, spesso schemi operativi caratteristici di prassi tipiche della didattica italiana (risoluzione algebrica di sistemi, soluzioni di disequazioni, studi di funzione). Nel tentativo di costruire opportuni modelli e strumenti per la valutazione dell'argomentazione nelle prove di matematica non si può ignorare la tendenza a considerare inutile l'utilizzo del linguaggio verbale negli elaborati di matematica da parte degli studenti, probabilmente effetto di una convinzione radicata anche negli insegnanti. Nel campione sono presenti elaborati sostanzialmente corretti o, in alcuni casi, addirittura notevolmente superiori alla media dal punto di vista della conoscenza e della competenza nell'applicare procedure, ma quasi totalmente privi di parole. Questa evidenza sembra innanzitutto rendere necessaria una distinzione tra argomentazione intesa come concatenazione di proposizioni, e altri tipi di argomentazione, come ad esempio argomentazioni grafiche o argomentazioni per assurdo con controesempi espressi solo in forma di prova empirica. L'argomentazione non può essere assente se lo studente è riuscito ad interpretare correttamente il problema e a fornire una soluzione opportuna e completa, con la concatenazione di passaggi effettuata in maniera coerente, ma spesso di questa argomentazione non c'è traccia nell'elaborato. D'altra parte, spesso, l'assenza di argomentazione verbale è legata alla riproduzione acritica di schemi risolutivi e procedimenti incontrati in precedenza in situazioni che lo studente giudica analoghe (clausola del contratto didattico nota come effetto Jourdain). L'assenza o presenza di parole non è quindi di per sé un indicatore di assenza o presenza di argomentazione consapevole da parte dello studente, ma solo un segnale della disaffezione di insegnanti e studenti a utilizzare il linguaggio naturale nel testo matematico per renderlo più esplicito. Il linguaggio naturale, nei testi in cui lo studente decide di farne uso, risulta talvolta stereotipato e non funzionale agli scopi comunicativi e argomentativi che dovrebbe perseguire. Negli esempi che seguono si può notare come di fatto il linguaggio naturale non entri sempre a fare parte del "discorso matematico" (Sfard, 1991) dello studente ma sia utilizzato per altri scopi.

La clausola di Esigenza di Giustificazione Formale
Analizziamo le risposte degli studenti ad alcuni quesiti. Il quesito 6 del compito di Ordinamento (S.O. 2010) chiede di determinare il dominio di una funzione:

6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

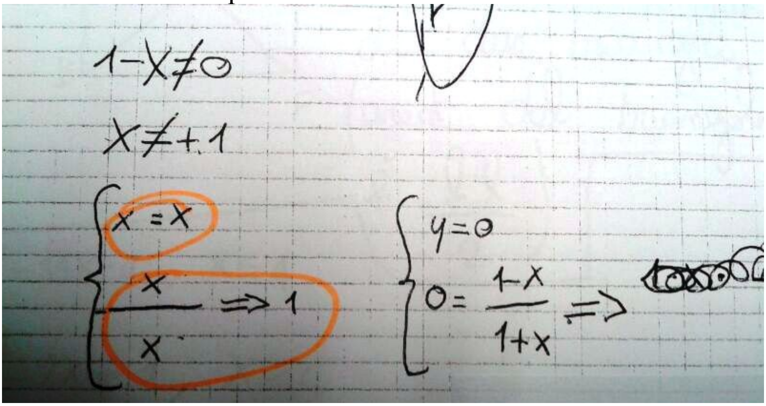
Riportiamo di seguito uno svolgimento:



Oltre alla non correttezza della soluzione fornita (nella sequenza di disuguaglianze i valori non sono in ordine crescente) possiamo notare l'esigenza da parte dello studente di scrivere "+ 2kπ" dopo lo zero. Si suppone che uno studente del Liceo Scientifico che sta svolgendo l'esame di Stato sappia benissimo che $0 + 2k\pi = 2k\pi$ e che quindi esplicitare lo 0 e l'operazione è completamente inutile. Questo comportamento è riconducibile ad altri casi studiati in letteratura e le interpretazioni sono numerose; ad esempio in D’amore (2007) si può ritrovare un caso simile e l’atteggiamento degli studenti sembra dovuto al fatto che essi ritengano di poter usare o si sentono “autorizzati” a usare, durante attività matematiche, numeri *solo dopo averli ottenuti grazie ad un’operazione che ne renda possibile l’utilizzazione come risultato di un’operazione, il che solo legittima e conferma la conoscenza intuitiva, rendendola scolasticamente accettabile* (D’Amore, 2007).

Questi comportamenti rientrano nella clausola di contratto didattico chiamata *esigenza di giustificazione formale* (egf). In molte sperimentazioni è stato osservato che gli studenti organizzano in proprio comportamento sulla base di affermazioni del tipo “l’insegnante vuole che facciamo tutti i passaggi” e “in matematica si devono fare dei calcoli”. Quando queste convinzioni degli studenti prendono il sopravvento, il controllo critico da parte degli studenti crolla e vengono svolti calcoli a volte insensati e si riscontra spesso una mancanza di controllo critico. Nonostante nei casi presenti in letteratura la clausola di esigenza di giustificazione formale sia normalmente documentata attraverso il “ricorso ai calcoli”, nella nostra indagine abbiamo trovato casi in cui si manifesta anche attraverso le scelte linguistiche.

Analizziamo ora il protocollo n° 94



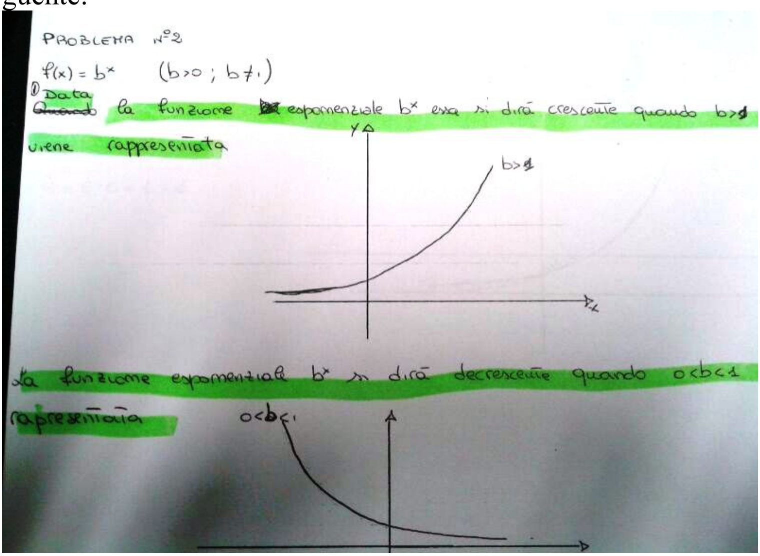
Possiamo notare che lo studente “non si sente autorizzato” a scrivere l’*uguale*, o semplicemente la parola *è,* e ricorre ad un elemento del linguaggio simbolico della matematica (che è un’espressione sincopata che sta al posto di “se … allora”).
Osserviamo ora la soluzione al primo punto del secondo problema del Compito di Ordinamento (S.O. 2010). Il testo del problema è il seguente:

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.

La soluzione fornita dallo studente (protocollo n°19) è la seguente:



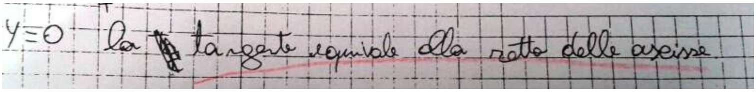
Lo studente sa che la funzione esponenziale è crescente quando b è maggiore di 1 e la rappresenta correttamente, ma *sente il bisogno* di fare ricorso alla struttura linguistica della definizione, utilizzandola in modo sbagliato. La clausola di esigenza di giustificazione formale si manifesta spesso con l’esigenza di fare *ricorso a una operazione* o, più generalmente, a delle procedure. In questo caso la clausola si esplicita rispetto al *ricorso alla struttura linguistica* di un elemento caratteristico dell’organizzazione logico-formale della matematica: la *definizione.* In questo caso, “si dirà” è scorretto. In matematica si dice crescente una funzione che ha una determinata proprietà; la funzione esponenziale, quando b >1, ha quella proprietà, quindi è crescente. L’utilizzo sbagliato del verbo spesso, nei protocolli analizzati, è una difficoltà di tipo logico-argomentativa. Infatti, a livello formale:

- un elemento generico dell’insieme considerato appartiene al sottoinsieme degli elementi “crescenti” quando ha una certa proprietà;
- il nostro elemento particolare ha quella proprietà quindi fa parte del sottoinsieme.

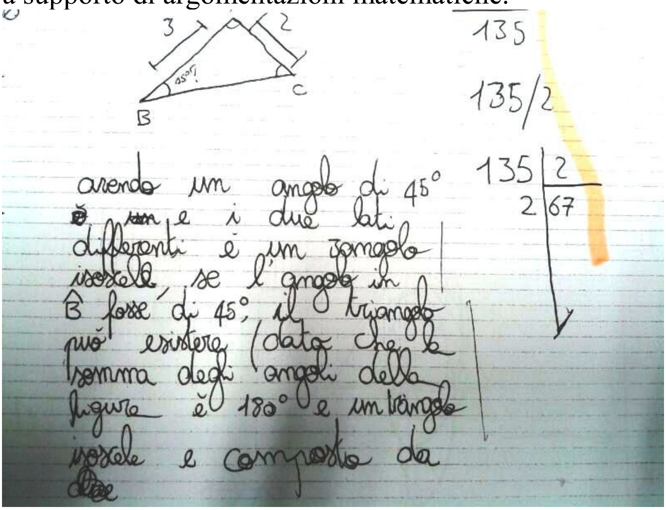
In casi come questo (sono numerosi quelli documentati nella nostra ricerca), quando gli studenti utilizzano i verbi sbagliati, utilizzano in modo scorretto gli elementi di base del sillogismo.
Possiamo ancora notare, negli esempi seguenti, altri comportamenti riconducibili alla clausola di *egf* del contratto didattico. Il terzo punto del primo problema del compito di Ordinamento (S.O. 2010) è il seguente:

3. Sia $g(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; quale è l’equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto R (0, 1)? E nel punto S (1, 0)? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?

Nel protocollo seguente possiamo notare, oltre ad un’espressione matematica completamente priva di senso nella quale non compare l’argomento del limite, un’altra struttura linguistica usata in modo inappropriato.



Infatti la tangente è la retta delle ascisse, non ha alcun senso utilizzare in questo contesto la parola "equivale". In matematica, si utilizza la parola equivale quando si hanno due oggetti diversi che dal punto di vista di una certa proprietà si comportano nello stesso modo; formalmente questo verbo in matematica è utilizzato quando si parla di *relazioni di equivalenza*. Anche qui emerge l'esigenza di giustificare il proprio operato attraverso il ricorso ad elementi, in questo caso di tipo linguistico, caratteristici del discorso matematico.
Notiamo ancora, nella soluzione (protocollo 39) riportata di seguito del quesito X, un utilizzo erroneo di strutture linguistiche a supporto di argomentazioni matematiche.



Oltre ad osservare la presenza di calcoli inutili al fine della risoluzione presentata e un linguaggio inappropriato nell'utilizzo della parola "triangolo", possiamo notare che le parole scritte dallo studente vogliono essere un'argomentazione (infatti la frase inizia con "avendo"). Indipendentemente dalla scorrettezza dal punto di vista matematico, come ad esempio l'asserzione sbagliata per la quale un triangolo avente due lati uguali è iso-

scele, la particolarità di questa argomentazione è che inizia con "avendo" e finisce con "può esistere". Siamo quindi di fronte all'utilizzo di un'argomentazione che, oltre ad essere priva di senso matematico, è costituita da una frase lasciata a metà.
Possiamo quindi concludere che la clausola di *egf* si manifesta con il ricorso a:

- Calcoli
- Simboli
- Strutture delle frasi (definizioni) e dei discorsi (dimostrazioni)
- Espressioni linguistiche

Nella maggior parte dei casi osservati il ricorso a questi elementi non è necessario e spesso errato.

6. Conclusioni.

Le maschere di correzione si sono rilevate idonee ai fini della ricerca e l'analisi combinata di esse e dei protocolli degli studenti ha fatto emergere quanto le difficoltà in matematica e di tipo linguistico sono strettamente correlate. Fattori come la presenza di calcoli inutili, la quasi totale assenza di argomentazioni, giustificazioni del proprio operato, esempi e controesempi a supporto delle proprie affermazioni, una scarsa competenza nell'interpretazione del testo e un'individuazione acritica dell'utilizzo dei dati confluente in un utilizzo inefficace delle procedure e degli strumenti di calcolo, si rivelano sia ad una analisi linguistica, sia ad una analisi matematica.
Analizzando gli eleborati del campione abbiamo osservato quanto le competenze trasversali indagate dalle maschere di correzione (testuali, grammaticali e lessicali) interagiscono in profondità con le competenze in matematica e influenzano in modo incisivo la produzione scritta degli studenti. Indagare i protocolli mediante l'analisi combinata con alcuni concetti chiave della didattica della matematica, come il contratto didattico, e con attenzione all'approccio linguistico ha permesso di interpretare alcuni degli errori compiuti dagli studenti e ha fatto emergere quanto le loro difficoltà siano riconducibili a

mancanze in entrambe le dimensioni. La clausola di contratto didattico di esigenza di giustificazione formale si è manifestata in questi protocolli attraverso il ricorso a strutture linguistiche proprie di discorsi matematici e a formalismi eccessivi, spesso inadeguati.

Il formato di analisi proposto si è rivelato molto funzionale e si presta ad essere utilizzato anche nel lavoro di valutazione proprio dell'insegnante, sia con scopi formativi che con finalità sommative. La tecnica della correzione multicolor e specifici segmenti della maschera potranno essere utilizzati anche dagli insegnanti per individuare e valutare analiticamente la componente comunicativa dell'apprendimento della matematica anche negli elaborati scritti prodotti nel normale percorso scolastico.

Riferimenti bibliografici

Brousseau, G., (1986), *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sarrazy B. (2010). *La didattica della matematica: gli "effetti" del contratto*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B.(2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d'insegnamento. *La matematica e la sua didattica.* 21 (3), 347-369. English version: D'Amore, B. (2008), Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices. *Mediterranean Journal of Research in Mathematics Education*. Vol. 7, (1), 1-22.

D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

Duval, R. (1995), Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages

Fandiño Pinilla, M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson

OECD, (2013), PISA 2012 Assessment and Analytical Framework, PISA, OECD Publishing.
Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de pédagogie*, Note de synthèse 112, 85-118.
Sfard A. (1991). Psicologia del pensiero matematico. Trento: Erickson