Lezioni di calcolo delle probabilità ed esercizi svolti

Ilia Negri[1]

Marzo 2006

[1]Dipartimento di Ingegneria – Università degli Studi di Bergamo – Dalmine

Prefazione

Quella che vi trovate tra le mani è la quarta versione di una selezione di temi d'esame degli ultimi 10 anni assegnati al corso di Statistica e Calcolo delle probabilità della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bergamo. Quest'anno la raccolta si arricchisce di una prima parte che copre gli argomenti di teoria della probabilità che si svolge a lezione. Il testo costituisce quindi un utile strumento per completare la formazione dello studente che sta preparando l'esame di Statistica e Calcolo delle Probabilità.

Il motivo che mi ha indotto ad integrare la parte di esercizi con la parte teorica è stato quello di raccogliere in un'unico testo tutti gli argomenti che nel corso degli anni si sono rivelati come i più utili in un corso di statistica e calcolo delle probabilità nelle facoltà di ingegneria. In questo modo lo studente si ritrova poi gli argomenti teorici richiamati negli esercizi direttamente nello stesso testo e questo ritengo sia un fattore di estrema comodità.

Per quanto riguarda la parte degli esercizi, ho cercato di suddividere gli esercizi per quanto possibile in argomenti omogenei. Si parte con gli esercizi che riguardano la teoria elementare della probabilità e del calcolo combinatorio. In questa sezione si trovano anche esercizi sugli schemi di campionamento casuale. In seguito si trovano gli esercizi che riguardano la nozione di probabilità condizionata e in cui si debbono applicare i teoremi delle probabilità totali e di Bayes.

Gli esercizi sulle variabili causali sono suddivisi in esercizi sulle variabili casuali discrete ed esercizi sulle variabili casuali continue. Anche in questa sezione ho cercato di raggruppare gli esercizi in cui figurano le stesse variabili casuali. Una sezione a parte è dedicata invece ai vettori aleatori.

La suddivisione fatta per gli esercizi non rende gli argomenti mutualmente esclusivi in quanto i temi d'esame, per loro natura, spaziano di solito tra più argomenti svolti all'interno del corso. Quindi, un esercizio che si trovi in una sezione potrebbe trovarsi in una o più altre sezioni della classificazione effettuata, e il fatto che si trovi proprio in quella scelta è per lo più dovuto ad un criterio di scelta personale (non casuale!)

La probabilità che vi siano ancora errori nel testo è molto elevata (direi che si tratta di un evento "quasi certo). Invito gli studenti più attenti a non farsi scappare l'occasione di segnalarmeli: renderanno un sicuro aiuto *alle generazioni di studenti che verranno*. In particolare debbo ringraziare i numerosi studenti che nel corso dei ricevimenti degli ultimi tre anni mi hanno segnalato numerosi errori di testo e non solo solo.

Dalmine, febbraio 2003.

Notazioni

$X \sim$ Legge(parametri)	indica che la variabile casuale X ha per distribuzione di probabilità la Legge con i parametri indicati.
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	v.c Normale di media μ e varianza σ^2.
$\mathrm{B}(p)$	v.c. di Bernoulli.
$\mathrm{Bin}(n, p)$	v.c Binomiale.
Z	v.c. Normale standard, cioè $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
$\phi(z)$	funzione di ripartizione di Z.
$\mathrm{IG}(M, K, m)$	v.c. Ipergeometrica di parametri.
$\mathrm{Poisson}(\lambda)$	v.c. di Poisson con parametro.
$\mathrm{U}(a, b)$	v.c Uniforme.
$\mathrm{Gamma}(n, \lambda)$	v.c. Gamma di parametri.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	v.c. Esponenziale.
χ^2_k	v.c. Chi-quadrato con k gradi di libertà.
$\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$	v.c. Beta.
$\mathrm{Geom}(p)$	v.c. Geometrica.
$\mathbf{E}$	valore medio o valore atteso.
$\mathbf{P}$	probabilità.
$C(r, n)$	numero di permutazioni di n oggetti in cui vi sono r coincidenze.
$N(M, n)$	numero di modi in cui si possono assegnare n oggetti distinti ad M celle distinguibili, in modo che nessuna rimanga vuota.
$S(M, n)$	numero di Stirling di classe M e n. Numero di modi in cui si possono assegnare n oggetti distinti ad M celle distinguibili, in modo che nessuna rimanga vuota.
I_A	la funzione indicatrice di un insieme A. è definita da

$$I_A(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in A, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Indice

Capitolo 1

Teoria della probabilità

1.1 La probabilità

Un esperimento il cui esito non è deterministico, ma che possiede una certa regolarità, ad esempio data da un certa frequenza dei possibili risultati, è detto aleatorio. Tali esperimenti sono molto più frequenti di quanto non si possa credere. Si pensi al numero di clienti che entrano in una filiale di una banca, in una certa ora, il tipo di ferita riportata dal prossimo ricoverato al pronto soccorso, il prezzo di un titolo della borsa di Milano tra tre settimane. Questi sono solo alcuni esempi in cui l'esito dell'esperimento può essere diverso e non noto a priori. Ogni volta che ci troviamo di fronte ad un problema concreto il primo passo consiste nella costruzione di un modello adeguato in grado di descrivere tutti i possibili esiti dell'esperimento che stiamo analizzando. Assegnare una probabilità agli esiti possibili costituisce il secondo passo della modellazione del problema. La probabilità ci fornisce delle informazioni riguardo il possibile esito di un esperimento aleatorio. Poiché gli esperimenti aleatori con cui avremo a che fare sono numerosi introduciamo un formalismo che ci permetta di descriverli tutti.

Definizione 1.1. *L'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio è detto* spazio campionario *ed è denotato con* Ω*. Gli elementi di* Ω *sono chiamati* eventi elementari *e denotati con* ω*.*

Esempio 1.2. Nell'esperimento che consiste nel lancio di una moneta i possibili esiti sono T, esce testa, e C, esce croce. Lo spazio Ω è quindi

$$\Omega = \{T, C\}.$$

Esempio 1.3. Nell'esperimento che consiste nel lancio di due monete i possibili esiti sono TT, TC, CT, CC, dove la prima lettera sta per l'esito del primo lancio e la seconda per l'esito al secondo lancio. Lo spazio Ω è quindi

$$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}.$$

Esercizio 1.4. *Provare a fornire lo spazio campionario per gli esperimenti descritti sopra. Nel caso di un esperimento che consiste nel lancio di 1000 monete descrivere Ω. Descrivere l'evento elementare in cui in tutti i lanci pari si presenti testa.*

Nel caso del numero di clienti che entrano in una filiale della banca in un ora possiamo identificare Ω con l'insieme dei numeri interi compreso lo zero. Vale a dire

$$\Omega = \{\omega : \omega = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Nel caso del tipo di ferita riportata dal prossimo ricoverato al pronto soccorso, Ω è costituito da tutti i tipi di ferite codificate in qualche modo. Nel caso del prezzo di un titolo della borsa di Milano tra tre settimane, Ω è costituito da tutti i numeri reali positivo o uguali a zero. Per quanto riguarda l'esperimento del lancio di 1000 monete, identifichiamo con 0 l'evento esce testa e con 1 l'evento esce croce. Lo spazio Ω consiste in tutte le sequenze di 0 e 1 lunghe 1000. Se indichiamo con k_i l'esito dell'i-esimo lancio, con $i = 1, \ldots, 1000$ e $k_i = 0$ se all'i-esimo lancio esce testa e $k_i = 1$ se all'i-esimo lancio esce croce, possiamo scrivere Ω in questo modo:

$$\Omega = \{\omega = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_{1000}) : k_i = 0, 1\}.$$

Si noti che la cardinalità di questo insieme, (cioè il numero di elementi da cui è composto) è 2^{1000}. L'evento elementare in cui in tutti i lanci pari si è verificato testa è

$$\omega \in \Omega : k_{2n} = 0, \quad n = 1, \ldots, 500.$$

Si noti che nelle posizioni dispari ci può essere sia 0 che 1.

Di fronte ad un esperimento aleatorio abbiamo almeno una certezza: almeno uno degli esiti facenti parte dello spazio campionario si deve realizzare. Non potendo sapere con certezza quale sarà l'esito dell'esperimento vorremmo almeno conoscere la probabilità con cui dei particolari sottoinsiemi di esiti si possono verificare. Tali sottoinsiemi sono detti *eventi* e sono di solito indicati con le lettere maiuscole A, E e altre, oppure, come nella terminologia insiemistica, enunciando la proprietà che descrive l'insieme. In generale, a seconda della forma di Ω, non tutti i sottoinsiemi di Ω hanno il diritto di chiamarsi eventi. Questo può apparire innaturale ma è dovuto ad un problema tecnico legato alla definizione di probabilità come misura in senso analitico. Ad ogni modo gli eventi a cui dovremo rinunciare saranno non importanti per i nostri scopi. Più formalmente vediamo quali sono i sottoinsiemi che possiamo considerare eventi.

Definizione 1.5. *La famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi di sottoinsiemi di Ω tale che*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

ii) se $A \in \mathcal{A}$, *allora* $A^C \in \mathcal{A}$;

iii) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, *allora* $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

è detta famiglia degli eventi di Ω[1]

Non ci soffermiamo sulle proprietà che deve avere $\mathcal{A}$, ma teniamo presente che nel caso lo spazio campionario Ω sia finito o numerabile, l'insieme $\mathcal{A}$ usualmente contiene tutti i sottoinsiemi di Ω, nel caso in cui Ω sia l'insieme dei numeri reali $\mathcal{A}$ usualmente contiene tutti gli intervalli e le unioni, finite ed infinite, di intervalli (si pensi ad esempio all'esperimento consistente nel tempo di attesa di un cliente ad una fila in cui l'esito dell'esperimento può essere un qualunque numero $t > 0$).

Da un altro punto di vista possiamo osservare che quando fissiamo un evento A al quale siamo interessati, il realizzarsi o il non realizzarsi di A

[1] Una tale classe di sottoinsiemi di Ω è detta sigma algebra.

dipende da tutta una serie di circostanze e che tutte queste circostanze possono essere viste come la struttura dell'esperimento. Il risultato dell'esperimento è detto realizzazione dell'esperimento e può oppure no fare parte di A. Noi non possiamo in generale prevedere con certezza l'esito di un esperimento ma possiamo solo fare due cose, per altro importantissime: elencare le possibili realizzazioni di un esperimento e dire con che probabilità si possono realizzare tali esiti. La probabilità è una funzione che assegna ad ogni evento un numero compreso tra 0 e 1, in modo tale che più la probabilità dell'evento è alta più siamo indotti a credere che l'evento si realizzi. La probabilità gode di alcune proprietà che, se possono apparire bizzarre ad una prima e formale lettura, hanno invece un immediata e naturale interpretazione pratica. Veniamo alla definizione.

Definizione 1.6. *La probabilità è una funzione* $\mathbf{P}$ *che deve soddisfare le seguenti proprietà per ogni evento* $E \in \mathcal{A}$*:*

i) $0 \leq \mathbf{P}(E) \leq 1$,

ii) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ *e* $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

iii) per ogni successione $E_1, E_2, \ldots$ *di eventi disgiunti*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_i).$$

Le condizioni imposte alla probabilità sono dovute al fatto che trattando gli eventi come insiemi devono essere possibili le varie operazioni insiemistiche.

La scelta dello spazio degli eventi elementari, o spazio campionario, Ω risulta quindi il primo passo nel formulare un modello probabilistico per l'esperimento che si sta considerando. In secondo luogo, accanto al concetto di spazio campionario, vi è quello di evento che può essere considerato come un particolare sottoinsieme dello spazio campionario. Questo perché in genere lo sperimentatore (cioè noi) è interessato non tanto al fatto se si è avuta una particolare realizzazione dell'esperimento, ma piuttosto se quella realizzazione appartiene ad un determinato insieme di realizzazioni. L'ulteriore passo è quello di assegnare ad ogni evento un *peso* che è chiamato probabilità.

Ricapitolando quanto descritto fin qui, quando dobbiamo descrivere o modellare un esperimento non deterministico ma casuale, tre sono le quantità da ben definire. Prima di tutto uno spazio Ω che descriva tutti i possibili esiti dell'esperimento, detto spazio degli eventi elementari o spazio campionario. In secondo luogo una classe di sottoinsiemi di Ω, indicata con $\mathcal{A}$, che contenga tutti gli eventi compatibili con la struttura di Ω, ai quali sia possibile associare una probabilità di realizzarsi. Infine, ma non ultima per importanza, una probabilità $\mathbf{P}$, in grado di quantificare con un peso, la probabilità che ogni evento di $\mathcal{A}$ ha di realizzarsi. La tripletta $(\Omega,\mathrm{A},\mathbf{P})$ è detta spazio di probabilità.

1.2 Schemi di campionamento

In questa sezione descriveremo alcuni spazi degli eventi che descrivono esperimenti molto importanti nelle applicazioni. Con il termine campionamento si intende l'operazione di estrazione di un certo numero di palline da un'urna. Il risultato dell'estrazione è detto campione. L'insieme di tutti i possibili campioni costituisce lo spazio campionario. Diversi esperimenti casuali possono dare come esito uno stesso tipo di campionamento. In questa sezione ci proponiamo di catalogare l'insieme degli esiti di alcuni diversi tipi di esperimenti casuali. Gli esperimenti consistono nell'estrazione di n palline da un'urna che contiene M palline. Essi si distinguono prima di tutto per il modo in cui possono essere estratte le palline e in secondo luogo per l'importanza o meno data all'ordine in cui sono estratte. L'utilizzo del modello costituito dall'urna e dalle palline è fatto solo per semplicità. Come vedremo nelle applicazioni e negli esercizi, tale modello può essere visto come l'esemplificazione di modelli assai più complessi. Il problema della costruzione di Ω per questi esperimenti si riduce quindi a cercare di dare una risposta alla domanda: *in quanti modi si possono estrarre n palline da un'urna che ne contiene M* *distinte?* Come abbiamo già accennato il numero di modi diversi in cui si possono estrarre le palline dipende da due fattori che caratterizzano l'esperimento casuale:

1. Si ripone nell'urna la pallina estratta prima dell'estrazione successiva?

2. Ha importanza l'ordine con cui le palline sono estratte?

A seconda delle risposte date alle due domande precedenti si distinguono 4 tipi diversi di schema di campionamento.

Si suppone che le M palline contenute nell'urna siano contraddistinte dai numeri $1, 2, \ldots, M$. Un campione di lunghezza n estratto dall'urna può essere indicato come $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, dove ciascun a_i per $i = 1, 2, \ldots n$ può assumere valori nell'insieme $\{1, 2, \ldots, M\}$ e rappresenta il valore della i-esima estrazione. Il numero delle n-uple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ diverse che si possono formare dipende dalle risposte che si danno ai due ultimi quesiti. Ad esempio una possibile realizzazione nel gioco del totocalcio può essere vista come un campione ottenuto estraendo 13 palline da un'urna che ne contiene 3, riponendo nell'urna la pallina prima di procedere all'estrazione successiva e dando importanza all'ordine con cui le 13 palline sono estratte. Nel seguito si analizzano i quattro schemi diversi di campionamento.

Primo caso. *Estrazione con riposizione e si da importanza all'ordine.* In questo caso due campioni $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sono diversi se almeno un valore assunto dalle a_i è diverso dal valore assunto da una delle b_i, oppure quando questi sono tutti uguali ma cambia l'ordine con cui compaiono nella n-upla. Per contare quanti campioni diversi si possono formare si ragiona nel modo seguente. Nella prima estrazione la pallina può essere scelta in M modi diversi. Nella seconda estrazione, poiché la pallina estratta viene rimessa nell'urna, questa può essere scelta di nuovo in M modi diversi. Per ognuno dei modi in cui è estratta la prima pallina vi sono M modi possibili di estrarre la seconda pallina, quindi in totale M^2 modi di estrarre due palline. In generale se si effettuano n estrazioni si avranno M^n modi diversi di estrarre le n palline. Il numero di campioni ottenuti è anche detto *disposizioni con ripetizione.* Ad esempio le combinazioni possibili al gioco del totocalcio sono $3^{13} = 1594323$. In questo caso le palline nell'urna sono $M = 3$ e sono fatte $n = 13$ estrazioni. Due campioni differiscono se nelle tredicine vi è almeno un simbolo in una posizione diversa. Si noti che in questo schema di campionamento si può avere $M \leq n$.

Secondo caso. *Estrazione senza riposizione e si da importanza all'ordine.* Per contare quanti campioni si possono formare si osserva che la prima estrazione può essere fatta in M modi. La seconda può essere fatta in $M-1$ modi in quanto la pallina scelta alla prima estrazione non viene rimessa nell'urna. Per ogni scelta della prima pallina vi sono quindi $M-1$ scelte della seconda. In totale le prime due scelte possono essere effettuate in $M \cdot (M-1)$ modi. I casi possibili se si eseguono n estrazioni sono quindi $M \cdot (M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1)$. Il numero di campioni ottenuti è detto *disposizioni semplici.* Introduciamo la notazione fattoriale dove con $k!$ per k intero e maggiore di zero di intende il prodotto di tutti gli interi da k fino a 1. Si assume per definizione che $0! = 1$. Allora il numero di casi possibili può essere scritto come

$$\frac{M!}{(M-n)!}.$$

Quanti numeri di sei cifre tutte diverse si possono formare? Si tratta di contare il numero dei campioni diversi che si ottengono facendo sei estrazioni senza riposizione in un'urna che contiene 10 palline. Chiaramente in questo tipo di esperimento ha importanza l'ordine con cui vengono estratte le palline in quanto un numero in una posizione assume un significato ben preciso. I casi possibili sono $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 5 = 151200$. In quanti modi possibili si possono ordinare 12 persone diverse? Ogni ordine possibile corrisponde ad effettuare 12 estrazioni da un'urna contenente 12 palline in questo schema di campionamento. I casi possibili sono $12! = 479001600$.

Terzo caso. *Estrazione senza riposizione e non ha importanza l'ordine.* Per contare i campioni possibili in questo caso facciamo la seguente osservazione. Due campioni dello schema precedente, che differiscano solo per l'ordine delle palline estratte ma non per le palline estratte, sono lo stesso campione in questo schema. Per ogni estrazione di n palline diverse vi sono $n!$ modi di ordinare queste n palline. I campioni ottenuti in questo modo rappresentano un unico campione per questo schema. I casi possibili sono dunque

$$\frac{M \cdot (M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1)}{n!}.$$

In pratica si applica quella che viene detta regola del pastore: per sapere quante pecore vi sono nel gregge si contano prima le zampe e poi si divide per quattro. Il numero di campioni ottenuto in questo schema prende il nome di *combinazioni semplici*. Per indicare il numero di campioni ottenuto con questo schema si utilizza la seguente scrittura:

$$\binom{M}{n} = \frac{M \cdot (M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1)}{n!} = \frac{M!}{(M-n)!n!}.$$

La quantità $\binom{M}{n}$ viene anche detta *coefficiente binomiale*. Ad esempio si supponga di voler sapere quante cinquine si possono formare nel gioco del Lotto. In questo caso si devono contare i campioni possibili ottenuti facendo 5 estrazioni senza riposizione da urna che contiene 90 palline. I casi possibili sono $\binom{90}{5} = 43949268$.

Quarto caso. *Estrazione con riposizione e non ha importanza l'ordine.* Si supponga di identificare le M palline contenute nell'urna con $M-1$ barre che dividono M celle (la prima e l'ultima cella non hanno la parete a sinistra e rispettivamente a destra).

$$1|2|\cdots|M-1|M$$

L'estrazione di n palline nello schema dell'urna con riposizione e senza dare importanza all'ordine, corrisponde all'assegnazione di n oggetti indistinguibili (chiamiamoli asterischi) alle M celle senza esclusione (cioè ogni cella può contenere più asterischi). Ad esempio se si devono fare $n = 4$ estrazioni, da un'urna che contiene $M = 7$ palline, una possibile assegnazione potrebbe essere

$$1|2*|3|4**|5|6|7*$$

	ORDINATI	NON ORDINATI
CON RIPOSIZIONE	M^n	$\binom{M-1+n}{n}$
SENZA RIPOSIZIONE	$\frac{M!}{(M-n)!}$	$\binom{M}{n}$

Tabella 1.1: Numero di campioni elementari nei differenti schemi di campionamento.

che corrisponde al campione $(2, 4, 4, 7)$. Se pensiamo agli $M-1$ bastoncini e agli n asterischi come ad $M - 1 + n$ oggetti diversi, ogni configurazione corrisponde ad una permutazione di questi oggetti. Ci sono quindi $(M - 1 + n)!$ configurazioni possibili. Due permutazioni di questo tipo corrispondono allo stesso campione nello schema che si sta considerando, quando, fissate le posizioni e i valori degli asterischi, si permutano gli $M - 1$ bastoncini. In modo analogo due permutazioni in cui sono fissate le posizioni dei bastoncini rappresentano lo stesso campione quando si permutano gli asterischi. In definitiva i casi possibili sono

$$\frac{(M-1+n)!}{(M-1)!n!} = \binom{M-1+n}{n}.$$

Il numero di tali campioni è detto *combinazioni con ripetizione*. Ad esempio quante tessere diverse del domino si possono formare? Tante quante il numero di estrazioni diverse che si possono effettuare estraendo due palline con riposizione da un'urna che ne contiene sei. I casi possibili sono $\binom{6-1+2}{2} = 21$.

Per i quattro schemi considerati abbiamo costruito lo spazio Ω degli eventi elementari. Il numero di elementi che appartengono ad Ω nei quattro schemi è riassunto nella tabella 1.1. Se si vuole calcolare la probabilità di un particolare evento in uno di questi schemi di campionamento si può supporre che ciascun evento elementare sia equiprobabile. Con l'ipotesi fatta la probabilità degli eventi si può calcolare come numero di casi favorevoli all'evento fratto numero dei casi possibili.

Esempio 1.7. *Calcolare la probabilità di fare ambo avendo giocato 2 numeri su una ruota del Lotto.*

In questo caso i casi possibili sono $\binom{90}{5} = 43949268$. Mentre i casi favorevoli sono $\binom{88}{3} = 109736$. Infatti le cinquine favorevoli sono quelle che contengono i due numeri giocati e altri tre numeri qualunque scelti tra gli 88 rimasti. La probabilità richiesta è pertanto $p = 0.0025$.

Quindi per considerare equo il gioco del Lotto una vincita ottenuta con l'ambo dovrebbe essere pagata circa 500 volte non le 50 attuali!

1.2.1 Schemi di campionamento duale

Se identifichiamo le M palline nell'urna con M celle distinte e le n estrazioni con l'assegnazione di n oggetti alle M celle abbiamo quello che si chiama campionamento duale. In questo caso dobbiamo contare in quanti modi è possibile assegnare n oggetti alle M celle. Il numero di modi dipende, anche in questo caso, da due fattori. Il primo fattore è se si permette ad una cella di contenere più di un oggetto (si parla in questo caso di assegnazioni senza esclusione). Il secondo fattore consiste nel considerare distinti o meno gli oggetti. Si parla di campionamento duale perché in questi schemi ritroviamo i casi già considerati. Precisamente un campione in uno di questi schemi è una n-upla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dove ciascun a_i indica la cella dove è stato assegnato l'oggetto i-esimo. Il fatto che in una cella non vi possa essere più di un'assegnazione corrisponde al caso di estrazione senza reimmissione (non si poteva avere lo stesso numero di pallina in un campione). Il fatto che si dia importanza all'ordine corrisponde al fatto che gli oggetti siano distinti. Ad esempio nell'assegnare due oggetti distinti a tre celle il campione $(3, 2)$ è diverso dal campione $(2, 3)$. Il primo campione indica che il primo oggetto è stato assegnato alla cella 3 e il secondo oggetto alla cella 2. Nel secondo campione l'assegnazione è stata inversa. Se però gli oggetti che si assegnano sono indistinguibili i due campioni sono da considerarsi un unico

	DISTINTI	NON DISTINTI
SENZA ESCLUSIONE	M^n	$\binom{M-1+n}{n}$
CON ESCLUSIONE	$\frac{M!}{(M-n)!}$	$\binom{M}{n}$

Tabella 1.2: Numero di campioni elementari nei differenti schemi di campionamento duale.

campione che informa che un oggetto è stato assegnato alla cella 2 e un altro oggetto alla cella 3. Il numero di campioni che si possono ottenere sono quindi riassunti nella tabella 1.2.

1.3 Proprietà della probabilità

Dagli assiomi della probabilità si ricavano alcune importanti proprietà. Considerati due eventi $A, B \in \mathcal{A}$. Allora

1. Se $A \cap B = \emptyset$ allora $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$;
2. $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$;
3. $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B \cap A^c) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$;
4. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$;
5. Se $A \subset B$ allora $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

Dimostrazione. La prima relazione si dimostra osservando che $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots$. Gli insiemi sono tutti disgiunti e quindi per la terza proprietà che deve soddisfare la probabilità si ricava

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + 0 + 0 + \ldots,$$

da cui la relazione cercata. Per dimostrare la seconda relazione si può scrivere $\Omega = A \cup A^c$ e quindi per la prima proprietà della probabilità:

$$\mathbf{P}(A \cup A^c) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Inoltre vale che $A \cap A^c = \emptyset$ e quindi per la proprietà 1 appena dimostrata vale che

$$\mathbf{P}(A \cup A^c) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^c)$$

Dalle due relazioni si ricava la tesi. Per dimostrare la terza proprietà scriviamo $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ dove gli insiemi $B \cap A$ e $B \cap A^c$ sono disgiunti. Allora si può scrivere

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}(B \cap A^c).$$

Riordinando si ottiene la tesi. Si osservi che se $A \subset B$ allora si deduce che $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$. La quarta proprietà si dimostra osservando che $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$. Allora, poiché A e $B \cap A^c$ sono disgiunti, si ha

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \cap A^c) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(B \cup A),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla proprietà tre appena dimostrata. Infine se $A \subset B$ allora $A \cap B = A$. Quindi per la terza proprietà si ha

$$0 \leq \mathbf{P}(B \cap A^c) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A),$$

da cui la relazione cercata. □

1.3.1 Principio di inclusione ed esclusione

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ uno spazio di probabilità. Il principio di inclusione ed esclusione permette di calcolare la probabilità dell'unione di n eventi.

Teorema 1.8. *Data una successione di eventi qualsiasi $A_1, A_2, \ldots$, per ogni $n > 1$ vale la seguente relazione*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<k} \mathbf{P}(A_i \cap A_k) + \ldots + (-)^{n-1}\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots A_n). \tag{1.1}$$

Dimostrazione. La dimostrazione viene fatta col principio di induzione. Dimostriamo la relazione per $n = 2$. Dobbiamo dimostrare che

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2).$$

Possiamo scrivere $A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cup A_2)$, dove i tre insiemi sono disgiunti. Vale quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbf{P}(A_1 \cap A_2^c) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}(A_1^c \cup A_2)\\ &\quad + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2)\\ &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2).\end{aligned}$$

Supponiamo vera la relazione per n, cioè valga la (1.1), dimostriamo la relazione per $n + 1$. Possiamo scrivere

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right).$$

Applichiamo ora il principio di inclusione ed esclusione con $n = 2$ agli insiemi $\bigcup_{i=1}^n A_i$ e A_{n+1}. Abbiamo quindi

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})\right) \tag{1.2}$$

Per l'ipotesi di induzione il principio vale per n. Quindi applichiamo il principio agli n insiemi $A_i \cap A_{n+1}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap A_{n+1})\\ &\quad - \sum_{i<k} \mathbf{P}((A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1})) + \ldots\\ &\quad + \ldots (-)^{n-1} \mathbf{P}((A_1 \cap A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_n \cap A_{n+1})).\end{aligned}$$

Applicando il principio anche al primo termine del secondo membro della (1.2) e unendo i risultati abbiamo la tesi. □

Il principio di inclusione ed esclusione è utilissimo nelle applicazioni. Una delle applicazioni più note è quella che porta il nome di *segretaria matta*. Il problema è il seguente. Una segretaria deve inserire n lettere intestate in n buste con la stessa intestazione. Se la segretaria assegna a caso le lettere alle buste quale è la probabilità che nessuna lettera sia nella busta giusta? In primo luogo contiamo i casi possibili, ovvero descriviamo lo spazio campionario. Si tratta di assegnare n oggetti distinti (le lettere) in n celle distinte (le buste) con esclusione (non più di un oggetto per cella). I casi possibili sono dunque $n!$ cioè le permutazioni di n oggetti. Indichiamo con $(a_1, \ldots a_n)$ una tale permutazione. Per calcolare la probabilità richiesta devo valutare quante sono le permutazioni tali che $a_i \neq i$ per ogni $i = 1, \ldots n$. Se indichiamo con $C(r, n)$ il numero di permutazioni di n oggetti che hanno esattamente r corrispondenze, vale a dire $a_i = i$ per r valori distinti di i, la probabilità richiesta è data da $C(0, n)/n!$, vale a dire: numero di casi favorevole $C(0, n)$ diviso per il numero dei casi possibili, $n!$. Consideriamo nello spazio Ω di tutte le permutazioni gli eventi $A_j = \{\text{permutazioni} : a_j = j\}$. Dobbiamo quindi calcolare $C(0, n)$. Allora è chiaro che l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità è $\bigcap_{i=1}^n A_i^c$. Ma del resto

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

Con l'ausilio del principio di inclusione ed esclusione calcoliamo la probabilità dell'unione degli insiemi A_i. Calcoliamo con ordine $\mathbf{P}(A_i)$ per ogni i. Si tratta di fare il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento A_i, cioè le permutazioni che hanno esattamente una corrispondenza, $C(1, n)$, e $n!$, i casi possibili. I casi favorevoli sono $(n-1)!$, tante quante le permutazioni degli $n-1$ oggetti che non sono fissati. Le probabilità di questo tipo che devo calcolare sono esattamente n, cioè $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$, $\ldots$, $\mathbf{P}(A_n)$. Veniamo al calcolo delle probabilità del tipo $\mathbf{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2})$. I casi favorevoli per questo tipo di evento sono $(n-2)!$. Il numero di probabilità di questo tipo sono $\binom{n}{2}$, cioè il numero di modi in cui si possono scegliere le coppie k_1 e k_2 tra gli n insiemi disponibili. Si prosegue in questo modo fino al calcolo di $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$. In questo caso abbiamo un solo caso favorevole. La probabilità cercata è dunque

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= n \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} \\ &+ \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} + \ldots + (-)^{n-1}\frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots (-)^{n-1}\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

La probabilità richiesta è quindi

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots (-)^{n-1}\frac{1}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-)^k \frac{1}{k!}.$$

Se indichiamo con $p(r, n)$ la probabilità che in una permutazione di n oggetti vi siano r corrispondenze abbiamo che

$$p(r, n) = \frac{C(r, n)}{n!}.$$

Si può dimostrare che $p(0, n)$, la probabilità che non vi sia alcuna corrispondenza tende, al crescere di n al valore $e^{-1} = 0.3679$. Al crescere del numero di buste quindi la probabilità di non indovinare nessuna assegnazione si assesta intorno al valore 0.37. Concludiamo la sezione calcolando il numero di permutazioni che hanno esattamente r coincidenze, vale a dire $C(r, n)$, numero utile in molte applicazioni. Tali permutazioni hanno esattamente $n - r$ cifre con nessuna coincidenza. Quindi fissate le r cifre che formano le coincidenze, vi sono $C(0, n - r)$ permutazioni che hanno le altre $n - r$ cifre senza alcuna coincidenza. Infine vi sono $\binom{n}{r}$ modi di scegliere le r cifre che formano le coincidenze. In conclusione

$$C(r, n) = C(0, n - r)\binom{n}{r}.$$

Nella tabella 1.3 si riportano i valori delle corrispondenze per diversi valori di r e di n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
r=0	0	1	2	9	44	265	1854	14833
1	1	0	3	8	45	264	1855	14832
2		1	0	6	20	135	924	7420
3			1	0	10	40	315	2464
4				1	0	15	70	630
5					1	0	21	112
6						1	0	28
7							1	0
8								1
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Tabella 1.3: Numero di coincidenze $C(r, n)$ in permutazioni di n oggetti.

1.4 Probabilità condizionata

Uno dei concetti più utili in teoria delle probabilità è il concetto di probabilità condizionata. Da un lato perché spesso siamo interessati a calcolare la probabilità di certi eventi quando già disponiamo di una parziale informazione. In questo senso il calcolo della probabilità è condizionato. In secondo luogo perché a volte per calcolare la probabilità di alcuni eventi è utile condizionare rispetto ad altri.

Definizione 1.9. *Dati due eventi A e B tali che $\mathbf{P}(B) > 0$, la quantità*

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

si chiama probabilità condizionata di A dato B.

La funzione $\mathbf{P}(\cdot|B)$ è una probabilità su Ω. Intuitivamente possiamo pensare di avere ristretto lo spazio campionario all'insieme B e relativamente al suo realizzarsi andiamo a calcolare le probabilità degli altri eventi. Dalla definizione di probabilità condizionata si ricava un'importante regola di calcolo. Dati due eventi A e B si ha:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B). \tag{1.3}$$

Questa relazione, a differenza di quella della definizione, vale anche se $\mathbf{P}(B) = 0$. La (1.3) si generalizza al caso di più di due eventi:

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A|B \cap C)\mathbf{P}(B|C)\mathbf{P}(C). \tag{1.4}$$

Infatti: $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A|B \cap C)\mathbf{P}(B \cap C)$. Ma $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B|C)\mathbf{P}(C)$, da cui la (1.4). In modo analogo la si dimostra per un numero maggiore di 3 eventi. Vale a dire, vale la seguente formula

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) =&\mathbf{P}(A_1|A_2 \cap \ldots \cap A_n)\mathbf{P}(A_2|A_3 \cap \ldots \cap A_n)\ldots \\ &\ldots \mathbf{P}(A_{n-1}|A_n)\mathbf{P}(A_n).\end{aligned}$$

Il seguente teorema illustra una proprietà che useremo spesso. Premettiamo la seguente definizione.

Definizione 1.10. *La successione di eventi (finita o infinita) $A_1, A_2, \ldots$ tali che*

1. *$A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$;*
2. *$\bigcup_i A_i = \Omega$;*

è detta una partizione di Ω.

Teorema 1.11. (Teorema delle probabilità totali). *Siano $A_1, A_2, \ldots$ eventi che formano una partizione per Ω. Allora per ogni evento B*

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i).$$

Dimostrazione. L'evento B può essere riscritto come $B = \bigcup_i (A_i \cap B)$. Gli eventi $(A_i \cap B)$ sono a due a due disgiunti. Per la numerabile additività della probabilità possiamo scrivere $\mathbf{P}(B) = \sum_i \mathbf{P}(A_i \cap B)$. Per definizione di probabilità condizionata si può scrivere $\mathbf{P}(A_i \cap B) = \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)$ e quindi la tesi. □

Il teorema ci dice che l'evento B può verificarsi solo in concomitanza con qualche A_i. Inoltre la formula del teorema, nota come formula delle probabilità totali, è utile perché il calcolo delle probabilità condizionate è a volte più semplice del calcolo diretto di $\mathbf{P}(A)$.

Esempio 1.12. Una compagnia di assicurazione ha diviso i suoi assicurati in due categorie. Nella prima categoria vi sono i soggetti più propensi ad avere incidenti, nella seconda quelli meno propensi. Denotiamo con H_1 e H_2 rispettivamente gli eventi, "il cliente appartenga alla categoria i–esima, con $i = 1, 2$. La proporzione di clienti nelle due categorie rispetto alla popolazione totale sta nel rapporto di $1 : 5$. Questa informazione porta a valutare $P(H_1) = \frac{1}{6}$ e $P(H_2) = \frac{5}{6}$. Supponiamo che nella prima categoria la probabilità di avere almeno un incidente in un anno sia 0.6 mentre nella seconda 0.06. Supponiamo che per un cliente di una qualunque delle due categorie, l'avere un incidente in un certo anno sia indipendente dall'averlo gli anni successivi e sia indipendente dalla categoria a cui appartiene. La probabilità che un cliente dell'assicurazione scelto a caso abbia un incidente nel corso di un anno (evento A_1) è, per il teorema delle probabilità totali

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_1|H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A_1|H_2)\mathbf{P}(H_2),$$

Tale probabilità vale

$$\mathbf{P}(A_1) = 0.6 \cdot \frac{1}{6} + 0.06 \cdot \frac{5}{6} = 0.15.$$

Denotiamo con A_2 l'evento corrispondente al fatto che un cliente abbia un incidente il secondo anno. La probabilità che un cliente abbia incidenti per due anni di seguito (evento $A_1 \cap A_2$) è

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2|H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2|H_2)\mathbf{P}(H_2).$$

Tale probabilità vale

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = (0.6)^2 \cdot \frac{1}{6} + (0.06)^2 \cdot \frac{5}{6} = 0.063.$$

Andiamo ora a calcolare la probabilità che un cliente abbia un incidente l'anno successivo dato che ne ha già avuto uno l'anno corrente. Si tratta di calcolare

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbf{P}(A_1)} = \frac{0.063}{0.15} = 0.42.$$

Si noti la differenza tra $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)$ e $\mathbf{P}(A_2|A_1)$. La seconda tiene conto dell'informazione che l'anno prima il cliente ha avuto un incidente, la prima no.

Il teorema seguente fornisce uno strumento molto utile per calcolare la probabilità condizionata di alcuni eventi.

Teorema 1.13. (Teorema di Bayes). *Siano $A_1, A_2, \ldots$ degli eventi che formano una partizione dell'insieme Ω tali che $\mathbf{P}(A_i) > 0$ e sia B, $\mathbf{P}(B) > 0$, un qualunque altro evento. Allora per ogni $i = 1, 2, \ldots$, vale la seguente formula:*

$$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di probabilità condizionata si ha

$$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Il numeratore si può riscrivere come $\mathbf{P}(A_i \cap B) = \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)$. Il denominatore, per il teorema delle probabilità totali, diventa

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di probabilità condizionata. □

Esempio 1.14. Riprendiamo l'esempio 1.12. Calcoliamo la probabilità che, dato che un assicurato ha avuto un incidente, questo provenga dal gruppo dei clienti propensi ad avere incidenti. Dobbiamo calcolare $\mathbf{P}(H_1|A)$, dove abbiamo indicato con A l'evento corrispondente all'avere un incidente. Con la formula di Bayes otteniamo:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2)\mathbf{P}(H_2)} = \frac{0.6 \cdot \frac{1}{6}}{0.15} = 0.6667.$$

1.5 Indipendenza

In generale la probabilità condizionata $\mathbf{P}(A|B)$ non è uguale alla probabilità non condizionata $\mathbf{P}(A)$. Quando invece tali probabilità coincidono possiamo concludere che la realizzazione dell'evento B non ha conseguenze sulla realizzazione dell'evento A. In questo caso si dice che l'evento A è indipendente dall'evento B. Dalla (1.3) si ricava quindi

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Questa relazione è simmetrica rispetto ad A e B quindi possiamo dire che quando A è indipendente da B anche B è indipendente da A.

Definizione 1.15. *Due eventi A e B sono detti indipendenti se vale la relazione*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Si noti che tale definizione vale anche se $\mathbf{P}(B) = 0$ o $\mathbf{P}(A) = 0$.

Esercizio 1.16. *Un esperimento consiste nell'estrarre una carta da un mazzo di 40 carte, suddivise in 4 semi (quadri cuori, fiori e picche) ciascuno con 10 tipi (i numeri dall'uno al sette, fante, donna e re). Verificare che gli eventi “la carta estratta è di fiori e “la carta estratta è un re sono indipendenti.*

Sia A l'evento *la carta estratta è di fiori*. Abbiamo $\mathbf{P}(A) = 10/40$. Sia B l'evento *la carta estratta è un re*. Abbiamo $\mathbf{P}(B) = 4/40$. Verifichiamo quanto vale $\mathbf{P}(A \cap B)$. Si tratta della probabilità dell'evento *la carta estratta è un re di fiori*. Abbiamo $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/40$. D'altro canto $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 1/4 \cdot 1/10 = 1/40$ per cui gli eventi A e B sono indipendenti.

Il concetto di indipendenza si estende da due a più eventi.

Definizione 1.17. *Gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono detti indipendenti se per ogni $1 \leq i < j < k < \dots \leq n$ valgono le seguenti relazioni*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_i \cap A_j) &= \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j), \\
\mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(A_k), \\
&\vdots \\
\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\dots\mathbf{P}(A_n).
\end{aligned}$$

Si badi che l'indipendenza a due a due di tre eventi non implica l'indipendenza a tre a tre.

Esempio 1.18. Un esperimento consiste nel lancio di un dado due volte. Consideriamo gli eventi A, "esce un numero pari al primo lancio, B, "esce un numero pari al secondo lancio e C, "la somma dei due lanci è un numero pari. Gli eventi A, B e C sono indipendenti a due a due ma non a tre a tre.

Capitolo 2

Variabili casuali

In generale più che all'esperimento in se si è interessati ad una qualche conseguenza della possibile realizzazione dell'esperimento. Ad esempio il giocatore che ha scommesso è interessato alla quantità della sua perdita più che al risultato dell'esperimento che ha generato tale perdita. Gli oggetti che servono a descrivere la perdita del giocatore, sono le variabili casuali e verranno definite tra breve. Dato un esperimento casuale ed uno spazio di probablità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ che lo descrive, la variabile casuale, è una funzione definita sullo spazio Ω degli eventi elementari, che associa ad ogni elemento di Ω uno ed un solo valore reale. Noi presenteremo e studieremo nel prossimo paragrafo le proprietà di un particolare tipo di variabili casuali: quelle discrete. Per questo tipo di variabile casuale definiremo le quantità che saranno importanti per lo studio che seguirà, quali ad esempio la funzione di densità (discreta), la funzione di ripartizione, e le quantità di sintesi come il valore atteso e la varianza. Nel paragrafo seguente presenteremo i vettori casuali discreti che descrivono contemporaneamente più di una caratteristica dell'esperimento considerato. Infine verranno introdotte le variabili casuali continue e saranno presentate le stesse quantità definite per le variabili casuali discrete. Dobbiamo tenere presente che con le variabili casuali discrete e continue non si esaurisce la casistica delle veriabili casuali. Per quanto riguarda però le applicazioni che intendiamo presentare in questo corso, lo studio di questo tipo di variabili sarà sufficiente.

2.1 Variabili casuali discrete

introduciamo la definizione di variabile casuale discreta.

Definizione 2.1. *Una variabile casuale (o aleatoria) discreta X è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ che assegna ad ogni evento elementare ω un valore reale x tale che $\mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) = \pm\infty\}) = 0$. Al variare di $\omega \in \Omega$ la variabile X può assumere solo un numero finito di valori o al più una infinità numerabile di valori. Indichiamo con $x_1, x_2, \ldots,$ i valori assunti dalla variabile casuale.*

Vale la pena osservare che in generale una variabile casuale deve essere tale da soddisfare anche la condizione che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ appartenga ad $\mathcal{A}$. Tale condizione è sempre soddisfatta da una variabile casuale discreta.

Gli insiemi del tipo $\{\omega : X(\omega) \in A\}$, dove A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, saranno importantissimi in tutto quello che tratteremo più avanti, per cui è bene abituarsi al loro significato: sono sottoinsiemi in Ω costituiti da tutti gli eventi elementari tali che l'immagine $X(\omega)$ appartiene al sottinsieme A di $\mathbb{R}$. Di solito utilizzeremo la scrittura più compatta

$$\{\omega : X(\omega) \in A\} = \{X \in A\}.$$

Con questa notazione possiamo riscrivere le condizioni date sopra come

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}(\{X = \pm\infty\}) = 0.$$

La differenza sostanziale tra le variabili aleatorie e le funzioni dell'analisi matematica è che non abbiamo un valore assunto dalla funzione per un determinato elemento del dominio dove la funzione è definita. O meglio abbiamo un tale valore solo quando osserviamo l'esito dell'esperimento, poiché in questo caso conosciamo la realizzazione che si identifica con un elemento dello spazio campionario, e quindi possiamo assegnare il valore osservato della variabile casuale. In generale delle variabili aleatorie possiamo solo conoscere i possibili valori che può assumere e la probabilità con cui possono essere assunti. Chiariamo il concetto con un esempio.

Esempio 2.2. Consideriamo l'esperimento consistente nel lanciare n volte una moneta. Lo spazio campionario Ω è costituito dalle 2^n $n-$uple del tipo $(x_1, \dots x_n)$ dove $x_i = 0$ se esce testa al $i-$esimo lancio, e $x_i = 1$ se esce croce al $i-$esimo lancio. Supponiamo di essere interessati al numero di croci presenti negli n lanci. Denotiamo con X tale numero. Allora X è una variabile casuale che associa ad ogni evento elementare un numero. Ad esempio ad $\omega = (x_1, \dots, x_n)$ tale che $x_i = 0$ per ogni i, associamo il valore $X(\omega) = 0$. Si tratta di una variabile casuale in quanto l'evento $\{\omega : X(\omega) = \pm\infty\} = \emptyset$ e quindi $\mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) = \pm\infty\}) = 0$. Inoltre si osservi che per ogni $x \in \mathbb{R}$ gli insiemi $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ appartengono ad $\mathcal{A}$ che in questo caso è formata da tutti i sottoinsiemi di Ω. A priori, data la struttura dell'esperimento, noi sappiamo che la variabile X può assumere un qualunque valore intero tra 0 e n, ma fino a quando non lanciamo n monete e non osserviamo l'esito di ciascun lancio, e contiamo il numero di croci, non possiamo dire che valore assumerà la variabile X. Possiamo però calcolare la probabilità che assuma uno quanlunque dei valori compresi tra 0 ed n. Questa è data da

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

come sarà chiaro una volta definita la variabile casuale Binomiale.

Un altro esempio di variabile semplice ma molto importante è la variabile indicatore.

Esempio 2.3. *Sia $E \in \mathcal{A}$ un evento. Denotiamo la variabile indicatore con I_E definita come*

$$I_E(\omega) = \begin{cases} 0 & se\ \omega \in E \\ 1 & se\ \omega \notin E \end{cases}$$

L'insieme dei valori che la variabile casuale assume prende il nome di *range* della variabile casuale. Il range della variabile casuale è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Su tale insieme viene indotta una probabilità dalla variabile X, che indichiamo con P_X, e che viene detta *distribuzione di probabilità* della variabile X, o *legge* della variabile X. Si introduce questa nuova probabilità perché si è interessati alla probabilità con cui la variabile casuale assume un dato valore. Da questo punto di vista siamo interessati, dato un insieme di valori $A \subset \mathbb{R}$ alla probabilità che $X \in A$. La distribuzione della variabile casuale X la si calcola partendo dalla probabilità definita su Ω

$$P_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A)),$$

dove $X^{-1}(A)$ è l'evento che consiste di tutti gli eventi elementari ω tali che $X(\omega) \in A$. La distribuzione P_X di una variabile casuale discreta in genere è determinata dalla densità discreta della variabile X. Diamo quindi la definizione di densità discreta.

Definizione 2.4. *Data la variabile casuale discreta X, la funzione $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definita da*

$$p_X(x) = \mathbf{P}(X = x),$$

è detta funzione di densità discreta di X (o funzione di massa di probabilità di X).

La funzione p_X gode delle seguenti proprietà

i) $p_X(x) = 0$ tranne al più per un infinità numerabile di valori di x, cioè i valori x_i, $i = 1, 2, \ldots$, che sono i valori che assume la variabile casuale X;

ii) $\sum_{i=1}^{+\infty} p_X(x_i) = 1$.

Una funzione $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ che goda delle proprietà *i*) e *ii*) è detta densità discreta o funzione di massa di probabilità o funzione di probabilità discreta. Dalla conoscenza della densità discreta possiamo risalire alla distribuzione della v.c. X. Siamo cioè in grado di calcolare $P_X(A)$ per ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$. Infatti osserviamo che possiamo scrivere

$$\{X \in A\} = \bigcup_{x_i \in A} \{X = x_i\}$$

e gli eventi a destra sono disgiunti, per cui

$$P_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x_i \in A} \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i).$$

In raeltà una variabile casuale discreta è completamente determinata da una funzione di probabilità discreta e dai valori del range. Viceversa dato un insieme di valori al più numerabile in $\mathbb{R}$ e dati dei valori p_i tali che soddisfino le condizioni $i)$ ed $ii)$, allora esiste un'opportuno spazio di probabilità e una variabile casuale discreta definita su questo spazio che ammette come funzione di probabilità discreta quella definita dalle p_i. La dimostrazione di questo fatto è data nel teorema 2.14 per variabili casuali qualunque a partire dal concetto di funzione di ripartizione.

La funzione di ripartizione è uno strumento molto importante sia dal punto di vista teorico che pratico per studiare le variabili casuali.

Definizione 2.5. *Data la variabile casuale X, per ogni numero reale x definiamo*

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

F_X è detta funzione di ripartizione della variabile casuale X.

La funzione di ripartizione ha le seguenti proprietà che si deducono direttamente dalla definizione.

Proposizione 2.6. *La funzione di ripartizione F_X della variabile casuale X gode delle seguenti proprietà:*

a) Se $x_1 < x_2$ allora $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$;

b) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;

c) F_X è continua a destra, cioè $\lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$

Una variabile casuale è completamente determinata una volta che sono noti i valori che può assumere e la probabilità con cui assume questi valori. Per identificare una variabile casuale dobbiamo conoscere il suo range e la sua legge di probabilità. Queste due caratteristiche possono essere determinate conoscendo l'esperimento e la probabilità associata ad ogni possibile realizzazione dell'esperimento, di cui la variabile casuale descrive la parte che interessa lo sperimentatore. In generale conoscere le realizzazioni dell'esperimento è assai complicato, mentre stabilire un modello probabilistico partendo da una variabile casuale può essere più intuitivo. Noi adotteremo questo punto di vista. È anche importante osservare che la distribuzione di una variabile casuale e la sua funzione di ripartizione sono legate univocamente[1], nel senso che si può dimostrare che data una funzione di ripartizione, cioè una funzione che soddisfa le tre condizioni della proposizione 2.6, si riesce a trovare una variabile casuale che ammette come funzione di ripartizione quella di partenza.

La funzione di ripartizione di una variabile casuale discreta è una funzione definita su tutto l'asse reale $\mathbb{R}$ crescente ed a salti. Ogni salto avviene nei valori x_i assunti dalla variabile aleatoria X ed ha ampiezza data da $p_X(x_i)$.

Tutte le questioni probabilistiche riguardanti le v.c. possono essere risolte tramite la funzione di ripartizione o la funzione di densità discreta. Ad esempio:

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{a<x_i\leq b} p_X(x_i).$$

Si noti che l'insieme $\{a < X \leq b\}$ è un evento (per la definizione data di v.c) e quindi ha senso calcolare la probabilità indicata.

A volte si è interessati, non alla v.c. nella sua interezza, ma a dei particolari valori che sintetizzano le informazioni contenute nella variabile casuale e che possono essere di immediata interpretazione. Questi sono ad esempio il valore atteso e la varianza.

Definizione 2.7. *Supponiamo che la variabile casuale X soddisfi la condizione*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| p_X(x_i) < +\infty.$$

[1]in realtà vi è univocità a meno di insiemi di probabilità nulla

Allora si chiama valore atteso della variabile casuale X la quantità

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_X(x_i).$$

Il valore atteso si può interpretare come il valore medio della variabile casuale. In effetti si tratta della media dei valori che puo' assumere la v.c. discreta pesata con le probabilità con cui questi valori sono assunti. I *momenti* sono altre quantità legate alle variabili casuali.

Definizione 2.8. *Supponiamo che la variabile casuale X soddisfi la condizione*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^k| p_X(x_i) < +\infty.$$

Allora si chiama momento di ordine k *della variabile casuale X la quantità*

$$\mathbf{E}(X^k) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^k p_X(x_i).$$

La varianza è un'altra quantità importante nello studio delle variabili casuali poiché misura la dispersione media della variabile casuale attorno al suo valore atteso.

Definizione 2.9. *Supponiamo che la variabile casuale X soddisfi la condizione*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^2| p_X(x_i) < +\infty.$$

Allora si chiama varianza della variabile casuale X la quantità

$$\mathbf{V}ar(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(x_i - \mathbf{E}(X)\right)^2 p_X(x_i).$$

La varianza di una v.c. può essere interpretata come il valor medio degli scarti al quadrato dalla media della variabile casuale. In pratica fornisce una misura di quanto in media i valori assunti dalla v.c. si allontano dal suo valor medio.

Vediamo ora alcune particolari variabili casuali discrete.

Variabile casuale di Bernoulli

Consideriamo un esperimento che abbia solo due possibili esiti classificati come successo e insuccesso. Definiamo la variabile casuale X uguale a 1 se si è verificato un successo, uguale a 0 se si è verificato un insuccesso. Sia p, $0 < p < 1$, la probabilità di ottenere un successo. Allora la densità discreta di X è data da

$$\begin{aligned} p_X(0) &= \mathbf{P}(X=0) = 1-p, \\ p_X(1) &= \mathbf{P}(X=1) = p. \end{aligned}$$

Si verifica inoltre che $\mathbf{E}(X) = p$ e $\mathbf{V}ar(X) = p(1-p)$. Indicheremo tale variabile aleatoria, detta di Bernoulli, con il simbolo $B(p)$.

Variabile casuale Binomiale

Consideriamo un esperimento che consiste in n prove, ciascuna delle prove con solo due possibili esiti classificati come successo ed insuccesso. Queste n prove supponiamo che siano indipendenti l'una dalle altre. Sia p la probabilità di successo in una prova. La variabile casuale X che rappresenta il numero di successi nelle n prove è detta variabile casuale Binomiale ed indicata con il simbolo $\mathrm{Bin}(n, p)$. Si tratta di una variabile che assume i valori $k = 0, 1, \ldots, n$ e la cui densità discreta è data da

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Si verifica che $\mathbf{E}(X) = np$ e $\mathbf{V}ar(X) = np(1-p)$.

Variabile casuale di Poisson

Indichiamo con $X(t)$ il numero di realizzazioni di un certo evento di interesse nell'intervallo $(0, t]$. Supponiamo (i) che in media si verifichino $\lambda > 0$ realizzazioni nell'unità di tempo; (ii) che in un intervallo infinitesimo di ampiezza h, la probabilità che si verifichi esattamente una realizzazione sia approssimativamente λh; (iii) che la probabilità che in un piccolo intervallo di tempo h si verifichi più di un arrivo sia trascurabile rispetto alla probabilità che si verivichi esattamente un arrivo; (iv) che siano indipendenti il numero degli arrivi in intervalli non sovrapposti. Allora si può dimostrare che

$$\mathbf{P}(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

La distribuzione della variabile $X(t)$ è una Poisson di parametro λt. Se l'intervallo di tempo è fissato all'unità temporale considerata ($t = 1$) la variabile casuale viene indicata con Poisson(λ). Si verifica che $\mathbf{E}(X(t)) = \lambda t$ e $\mathrm{Var}(X(t)) = \lambda t$.

Variabile casuale Ipergeometrica

Consideriamo un'urna che contenga M palle di cui K rosse e le restanti $M - K$ blu. Supponiamo di effettuare n estrazioni da tale urna senza rimettere le palle estratte nell'urna. La variabile casuale X che rappresenta il numero di palle rosse tra le n estratte si chiama variabile casuale ipergeometrica e indicata con $\mathrm{IG}(M, K, n)$. Essa assume tutti i valori interi tra $\max(0, n - (M - K))$ e $\min(K, n)$. La densità discreta è data da

$$P_X(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{n}{x}}, \quad \max(0, n - (M - K)) \leq x \leq \min(K, n).$$

Si verifica che $\mathbf{E}(X) = n\frac{K}{M}$ e $\mathbf{V}ar(X) = n\frac{K}{M}\frac{M-K}{M}\frac{M-n}{M-1}$.

Variabile casuale Geometrica

Consideriamo l'esperimento che consiste nel replicare prove indipendenti, ciascuna delle quali ha solo due possibili esiti (successo e insuccesso), fino al realizzarsi del primo successo. Supponiamo che in ciascuna prova la probabilità di ottenere un successo sia p. La variabile X che rappresenta il numero di prove da effettuare prima del primo successo si chiama variabile casuale Geometrica, la si indica con $\mathrm{Geom}(p)$ e la densità discreta è data da

$$p_X(n) = (1-p)^{n-1}p, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Si tratta di una variabile casuale che può assumere un infinità numerabile di valori. Si verifica che $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$, mentre $\mathbf{V}ar(X) = \frac{1-p}{p^2}$. Un altro modo di definirla è quello di considerare la variabile casuale Y che conta il numero di insuccessi prima del primo successo. Si ha che $Y = X - 1$ e

$$p_Y(n) = (1-p)^n p, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

In questo caso $\mathbf{E}(Y) = \frac{1-p}{p}$, mentre $\mathbf{V}ar(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

Vediamo ora un esempio di variabile casuale discreta.

Esempio 2.10. Consideriamo una particella che si possa muovere sull'asse delle ascisse ad ogno istante di una unità a destra o a sinistra secondo lo schema seguente. La posizione della particella all'istante n sia descritta da una variabile casuale X_n definita ricorsivamente da $X_n = X_{n-1} + Z_n$ dove la successione di variabili Z_n, $n = 1, 2, \ldots$ costituisce una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite che assumono i valori -1 e $+1$ con probabilità rispettivamente di $\frac{1}{2}$. Si supponga che la particella all'istante 0 parta dal punto 0, valga cioè $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$. Vogliamo determinare $\mathbf{P}(X_n = r)$ per ogni n e per ogni r. Innanzitutto osseviamo che fissato n, r può assumere solo i valori $(-n, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, n)$ per n pari e $(-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n)$ per n dispari. Quindi l'insieme dei valori che ciascuna variabile X_n può assumere è finito. Per determinare $\mathbf{P}(X_n = r)$ possiamo scrivere $X_n = Z_1 + \ldots + Z_n$. Tutti i cammini possibili di n passi sono individuati da una serie di $+1$ e -1, e sono 2^n, per cui la probabilità che si realizzi uno dei possibili cammini è $\frac{1}{2^n}$. Indichiamo con a il numero di $+1$ e con b il numero di -1. I cammini che partono da 0 e arrivano in r in n passi sono tali che $a + b = n$ e $a - b = r$. Tali cammini sono individuati ogni volta che scelgo gli a istanti in cui abbiamo $+1$. Tali cammini sono $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$. Dal sistema ricaviamo $a = \frac{n+r}{2}$, se $\frac{n+r}{2}$ è intero. Ricaviamo quindi

$$\mathbf{P}(X_n = r) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n} & r = 0, \pm 2 \ldots \pm n, \text{se } n \text{ è pari} \\ \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n} & r = \pm 1, \pm 3 \ldots \pm n, \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osservi che ciascuna X_n è una variabile casuale discreta e che per n tendente all'infinito l'insime dei valori che tale variabile può assumere tende all'infinito, pur rimanendo numerabile.

2.2 Vettori aleatori discreti

I vettori aleatori si introducono quando si vogliono studiare più caratteristiche diverse legate allo stesso esperimento. Quando si studiano le proprietà che riguardano due o più variabili aleatorie si introducono delle quantità che descrivono il comportamento delle variabili congiuntamente. Supponiamo che X e Y siano due variabili casuali discrete. Denotiamo con $x_1, x_2, \dots$ i valori che può assumere la variabile X e analogamente con $y_1, y_2, \dots$ i valori che può assumere la variabile Y. Abbiamo visto che tali valori possono essere al più solo un'infinità numerabile.

Definizione 2.11. *La densità di probabilità congiunta (discreta) delle variabili X e Y è definita come*

$$p_{XY}(x, y) = \mathbf{P}(X = x, Y = y),$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Abbiamo indicato semplicemente con $\{X = x, Y = y\}$ l'evento $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$. Osserviamo che solo per un'infinità al più numerabile di punti x e y si ha $p_{XY}(x, y) > 0$. Per non appesantire le notazioni indicheremo semplicemente con $p(x, y)$ la densità congiunta nel punto (x, y). Dalla densità congiunta si ricavano le densità marginali, cioè le densità delle variabili X e Y considerate singolarmente. Precisamente

$$p_X(x) = \sum_{y: p(x,y)>0} p(x, y)$$

e analogamente

$$p_Y(y) = \sum_{x: p(x,y)>0} p(x, y).$$

La dimostrazione è immediata. Infatti possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p_X(x) = \mathbf{P}(X = x) &= \sum_{y:p(x,y)>0} \mathbf{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{y:p(x,y)>0} p(x,y). \end{aligned}$$

Due variabili casuali discrete X e Y sono dette indipendenti se, e solo se, si verifica che

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Questo significa che se due variabili casuali sono indipendenti allora la densità congiunta è data dal prodotto delle marginali, cioè

$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Date due variabili casuali discrete X e Y e una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si chiama valore atteso congiunto della funzione aleatoria $g(X,Y)$ la quantità

$$\mathbf{E}\left(g(X,Y)\right) = \sum_{x,y} g(x,y)p(x,y).$$

Una proprietà molto importante del valore atteso è la seguente. Si verifica che

$$\mathbf{E}\left(aX + bY\right) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y),$$

dove a e b sono due costanti. Date n variabili casuali discrete X_1, X_2, ..., X_n, si definisce la funzione di densità congiunta come

$$p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right).$$

Le densità marginali si ricavano in modo ovvio. Inoltre, per il valore atteso verifica che

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{E}\left(X_i\right),$$

dove a_i sono costanti. Se X e Y sono due variabili discrete si definisce la densità condizionata di X dato $Y = y$. Se $\mathbf{P}(Y = y) > 0$, essa è data da

$$p_{X|y}(x|y) = \mathbf{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbf{P}(X = x, Y = y)}{\mathbf{P}(Y = y)}.$$

La densità condizionata si utilizza per calcolare il valore atteso condizionato di una variabile rispetto al valore assunto da un'altra. Siano X e Y due variabili casuali discrete, aventi densità congiunta $p(x, y)$ e densità marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$. Abbiamo la seguente

Definizione 2.12. *Dato l'evento $\{X = x\}$ tale che $\mathbf{P}(X = x) > 0$, si definisce valore atteso condizionato della variabile casuale Y, dato l'evento $\{X = x\}$, la quantità*

$$\mathbf{E}(Y|X = x) = \sum_y y p_{Y|x}(y|x)$$

Si tratta, al variare di x, della funzione di regressione. Cioè del valor medio della variabile Y, dato che la variabile X ha assunto il valore x.

2.3 Variabili casuali continue

La teoria delle probabiità necessaria per formalizzare il concetto di variabile casuale continua è assai più complessa di quella fin qui presentata. Per introdurre le variabili casuali continue prendiamo il problema da un altro lato. Partiamo dalla seguente definizione di funzione di ripartizione senza riferimento ad una variabile casuale.

Definizione 2.13. *Una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *se $x < y$ allora $F(x) \leq F(y)$;*
2. *$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;*
3. *F è continua a destra, cioè $\lim_{h\to 0} F(x + h) = F(x)$*

è detta funzione di ripartizione.

Il seguente teorema costituisce il risultato fondamentale che permette di definire le variabili casuali senza far riferimento alla teoria della misura.

Teorema 2.14. *Se F è una funzione che soddisfa le tre proprietà della definizione precedente, allora esiste un opportuno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ e una variabile casuale X definita su questo spazio per la quale vale che $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = F(x)$.*

Dimostrazione. (Cenni.) Come spazio consideriamo lo spazio $\mathbb{R}$. Come classe degli eventi la classe detta σ–algebra di Borel, che denotiamo con $\mathcal{B}$. La costruzione di tale classe è assai complessa ma per gli scopi che ci siamo prefissati ci basta sapere che contiene gli intervalli aperti del tipo (a, b), con $a \leq b$ $a, b \in \mathbb{R}$, ed è chiusa rispetto ai complementari e alle unioni numerabili. Su questo spazio definiamo per gli intervalli del tipo $(a, b]$ una probabilità in questo modo:

$$\mathbf{P}((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Si noti che gli intervalli del tipo $(a, b]$ sono eventi, cioè, per quanto abbiamo detto, sono insiemi che appartengono alla classe $\mathcal{A}$. La $\mathbf{P}$ appena definita si dimostra che è una probabilità. Le prime due proprietà sono infatte dimostrabili partendo dalla definizione di F. La numerabile additività necessita di strumenti sofisticati per essere dimostrata e non viene fatta in questo corso. Per chi fosse interessato può leggere il Billingsley [2]. A questo punto definiamo la funzione X dallo spazio $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ come $X(\omega) = \omega$, vale a dire la funzione identità. La funzione di ripartizione di tale variabile casuale è data da

$$F_X(x) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathbf{P}((-\infty, x]) = F(x).$$

E quindi la variabile casuale X ammette come funzione di ripartizione quella data. □

In virtù di questo teorema potremo definire le variabili casuali partendo dalla loro funzione di ripartizione. Osserviamo, prima di definire la variabili casuali continue, che anche le variabili casuali discrete possono essere ottenute in questo modo. Esse infatti sono completamente determinata dal loro range, $\mathcal{R} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e dalla funzione di massa di probabilità discreta $p_X(x_i)$. Dato quindi in $\mathbb{R}$ un'insieme di punti $\mathcal{R} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e un insieme di valori p_i tali che $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$, si può sempre definire una funzione di ripartizione come $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$. Tale funzione è una funzione di ripartizione e quindi esiste una variabilie casuale che ha una tale F come funzione di ripartizione. L'insieme $\mathcal{R}$ in questo caso viene detto supporto della funzione di ripartizione F. La F, in questo caso, è continua a tratti ed è costante in ogni intervallo $x_i \leq x < x_j$ ed in ogni punto x_j di $\mathcal{R}$ compie un salto pari a p_j.

Veniamo ora alla definizione di variabile casuale continua. Premettiamo la seguente definizione.

Definizione 2.15. *La funzione di ripartizione F ammette densità se esiste una funzione non negativa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \tag{2.1}$$

per ogni $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Se esiste una tale funzione chiaramente soddisfa $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Si osservi che non si richiede alla funzione f di essere continua. Se però la funzione f è continua, non negativa e soddisfa $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, allora si può definire una funzione di ripartizione come

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La F definita in questo modo è la funzione di ripartizione di una variabile casuale continua. Si osservi che dalla relazione (2.1) non segue affatto che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tutto quello che si richiede alla funzione f è che definisca propriamente l'integrale. Se però la funzione f è continua, allora $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se vale (2.1).

Poichè la funzione di ripartizione, in genere, non ha una espressione analitica semplice, si preferisce definire le variabili casuali continue direttamente a partire dalla densità. Con la stessa procedura le variabili casuali discrete possono essere definite a partire dalla funzione di probabilità discreta.

Come abbiamo fatto per le variabili casuali discrete definiamo il valore atteso e la varianza. Sia data una funzione di densità f che identifica una variabile casuale continua indicata con X.

Definizione 2.16. *Sia data una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che sia possibile definire ed abbia valore finito il seguente integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x) dx.$$

Allora ha senso definire il valore atteso della variabile casuale $g(X)$ come

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.$$

In particolare possiamo definire il valore atteso di una variabile casuale X.

Definizione 2.17. *Supponiamo che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty.$$

Il valore atteso della variabile casuale X è dato da

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Possiamo, più in generale, definire i momenti di ordine k di una variabile casuale X.

Definizione 2.18. *Supponiamo che per qualche k intero*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x) dx < +\infty.$$

Il momento di ordine k della variabile casuale X è dato da

$$\mathbf{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Anche per le variabili casuali continue si definisce la varianza.

Definizione 2.19. *Supponiamo che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 f(x)dx < +\infty.$$

La varianza della variabile casuale X è data da

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}(x))^2 f(x)dx.$$

Vediamo ora qualche particolare variabile casuale continua.

Variabile casuale Uniforme

Si tratta di una variabile casuale che, come dice il nome, si distribuisce uniformemente su un intervallo. La forma della densità è la seguente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Indicheremo la variabile casuale con distribuzione uniforme con $X \sim \mathrm{U}(a, b)$, dove a e b sono i parametri della distribuzione e devono essere tali che $a < b$. Si verifichi per esercizio che $\int_a^b f(x)dx = 1$. Si verifichi, sempre per esercizio, che

$$\mathbf{E}(X) = \frac{b+a}{2}$$

e

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b+a)^2}{12}.$$

Variabile casuale Esponenziale

La variabile casuale ha la seguente densità:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se X ha distribuzione esponenziale scriveremo $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Deve essere $\lambda > 0$. Si verifichi per esercizio che

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

e

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Variabile casuale Gamma

La densità di una variabile casuale Gamma ha la seguente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La quantità $\Gamma(n)$ è il valore assunto dalla funzione indicata con Γ nel punto n. Tale funzione è definita nel seguente modo:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0.$$

I paramentri che compaiono nella forma della densità devono essere tali che $\lambda > 0$ e $n > 0$. Si noti che n può anche non essere intero. Si ricava, integrando per parti che $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. In particolare per gli interi vale che $\Gamma(n+1) = n!$. Per indicare che una variabile casuale X ha distribuzione Gamma scrioveremo $X \sim \mathrm{Gamma}(n, \lambda)$. Si dimostra che

$$\mathbf{E}(X) = \frac{n}{\lambda}$$

e

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Si osservi che per $n = 1$ la variabile casuale Gamma diviene una variabile casuale esponenziale. La variabile Gamma con $n = \frac{k}{2}$, k intero positivo, e $\lambda = \frac{1}{2}$ prende il nume di variabile casuale Chi-quadrato ed indicata con χ^2_k dove k sono detti gradi di libertà.

Variabile casuale Gaussiana

Tale variabile casuale è forse la più famosa e la più usata in statistica. Prende il nome anche di variabile casuale Normale. La densità è data da:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0.$$

La varibile casuale Gaussina si indica con $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Per una variabile casuale Gaussiana si dimostra che

$$\mathbf{E}(X) = \mu \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

I parametri sono quindi chiamati rispettivamente media e varianza.

Variabile casuale Beta

La densità di una variabile Beta ha la seguente forma

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1,$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono i parametri della distribuzone. La funzione $B(\alpha, \beta)$, detta funzione Beta, ha la forma

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

ed è legata alla funzione Gamma tramite la relazione

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Se una variabile casuale X ha una distribuzione Beta con parametri α e β sarà indicata con $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$. Si dimostra che

$$\mathbf{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}.$$

Nel caso in cui $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ la variabile Beta è una variabile uniforme sull'intervallo $(0, 1)$.

Capitolo 3

Esercizi

3.1 Calcolo combinatorio, eventi elementari

Esercizio 3.1 (Es 1 del 19/9/02). *Si consideri un gioco di carte che consiste nello scegliere 5 carte da un mazzo di 52. Il mazzo risulta composto da 4 semi differenti (cuori, quadri, fiori, picche) e ciascun seme da 13 tipi differenti (asso, i numeri dal due al 10, fante donna e re).*

a) Calcolare la probabilità di estrarre quattro carte dello stesso tipo.

b) Dato che avete estratto quattro carte dello stesso tipo, calcolare la probabilità che le quattro carte siano quattro assi.

c) Calcolare la probabilità di estrarre esattamente una doppia coppia, vale a dire una coppia di un tipo e un'altra coppia di un tipo diverso dalla precedente.

I modi possibili di estrarre 5 carte da un mazzo che ne contiene 52 sono

$$\binom{52}{5} = 2598960.$$

a) I casi favorevoli sono dati da $13 \cdot 48 = 624$. Infatti 13 sono i modi di scegliere il tipo di cui vogliamo le quattro carte e 48 sono i modi di scegliere la quinta carta tra le $52-4=48$ carte rimaste. La probabilità è data da

$$\frac{624}{2598960} = 0.0002.$$

b) Denotiamo con A l'evento *estrarre quattro carte di uno stesso tipo* e con B l'evento *estrarre quattro assi*. Abbiamo $\mathbf{P}(A) = \frac{624}{2598960} = 0.0002$, dal punto precedente. Mentre $\mathbf{P}(B) = \frac{48}{2598960} = 0.00002$. Si tratta di calcolare $\mathbf{P}(B|A)$. Dalla definizione di probabilità condizionata si ha

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = 0.0769.$$

Senza passare per le probabilità condizionate, c'è una possibilità su 13 che le quattro carte dello stesso tipo siano quattro assi: $1/13 = 0.0769$.

c) I casi possibili sono esattamente

$$\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\cdot(52-8) = 123552.$$

Infatti $\binom{13}{2}$ sono i modi in cui si possono scegliere i due tipi con i quali comporre le due coppie. $\binom{4}{2}$ sono i modi in cui si possono scegliere due semi tra i quattro per ciascuna delle due coppie. $52-8=44$ sono i modi di scegliere la quinta carta tra le carte rimanenti tolti i tipi delle coppie. In questo modo evitiamo di contare anche i casi in cui c'è un tris di un tipo. La probabilità richiesta è

$$\frac{123552}{2598960} = 0.0475.$$

Esercizio 3.2 (Es 2 del 11/11/02)**.** *I pezzi prodotti da una macchina utensile sono confezionati in pacchi che contengono 12 pezzi ciascuno contraddistinti dal numero di matricola. Nella confezione comprata dal* *signor Fessoni sono stati inseriti, tra i dodici pezzi, 3 pezzi difettosi. Prima di acquistare la scatola il signor Fessoni decide di estrarre a caso 2 pezzi insieme e di esaminarli. Deciderà di acquistare la confezione solo se nel campione da lui estratto non vi saranno pezzi difettosi.*

a) *In quanti modi diversi possono essere estratti i due pezzi?*

b) *Quale è la probabilità che venga estratto almeno un pezzo difettoso?*

c) *Supponiamo che le estrazioni avvengano sequenzialmente e senza reimmissione. Se il primo pezzo estratto non è difettoso, quale è la probabilità che anche il secondo non lo sia?*

Possiamo identificare i 12 pezzi nella scatola con un'urna che contiene 12 palline e la scelta di due pezzi come l'estrazione di due palline.

a) I modi possibili sono tanti quanti i modi in cui si possono estrarre $n = 2$ palline da un'urna ne contiene 12, senza reimmissione e non dando importanza all'ordine.

$$\binom{M}{n} = \binom{12}{2} = 66$$

b) I casi favorevoli sono dati dalle coppie in cui vi è un pezzo difettoso e da quelle in cui ve ne sono due.

$$\binom{3}{1}\binom{9}{1} + \binom{3}{2}\binom{9}{0} = 27 + 3 = 30.$$

La probabilità è data dal rapporto

$$p = \frac{30}{66} = 0.4545.$$

c) Se è stato estratto un pezzo non difettoso alla prima estrazione, la probabilità che nella seconda estrazione si estragga ancora un pezzo non difettoso è

$$p = \frac{8}{11} = 0.7272,$$

in quanto nell'urna sono rimaste 11 palline di cui 8 del tipo *non difettoso*.

Esercizio 3.3 (Es 1 del 12/9/95)**.** *Il lotto di produzione di una macchina è formato da N pezzi numerati da 1 a N di cui i primi m sono fuori tolleranza, mentre gli altri $N - m$ sono stati fabbricati in tolleranza. Degli N pezzi del lotto ne vengono utilizzati n estraendoli casualmente e senza riposizione. Si consideri l'evento* il k-esimo pezzo estratto è fuori tolleranza *e lo si indichi con A_k.*

a) Trovare $\mathbf{P}(A_k)$;

b) trovare $\mathbf{P}(A_k \cap A_j)$;

c) posto $N = 140$, $m = 35$, $n = 40$, $k = 30$, $j = 31$, calcolare $\mathbf{P}(A_{30})$ e $\mathbf{P}(A_{30} \cap A_{31})$ e dire come varia $\mathbf{P}(A_k \cap A_j)$ al variare di $j - k$.

a) I casi possibili c_p, sono i campioni di ampiezza n con riposizione, e ordinati, estratti da un'urna che contiene N oggetti (distinti). Essi sono

$$c_p = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1).$$

I casi favorevoli c_f, sono tutti quei campioni che hanno un pezzo fuori tolleranza alla k-esima posizione. Essi sono

$$c_f = m \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-1-(n-1)+1),$$

poiché il pezzo fuori tolleranza posso sceglierlo in m modi e quindi, postolo nella k-esima posizione, mi rimangono da scegliere $(n-1)$ oggetti tra $(N-1)$. Quindi

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{c_f}{c_p} = \frac{m \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)}{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)} = \frac{m}{N}.$$

b) In questo caso i casi favorevoli sono

$$c_f = m(m-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot \ldots \cdot (N-2-(n-2)+1)$$

in quanto, il primo pezzo fuori tolleranza, che piazzo nella k-esima posizione, posso sceglierlo in m modi, mentre il secondo pezzo fuori tolleranza, che piazzo nella j-esima posizione, posso sceglierlo in $m-1$ modi. Posso ancora scegliere in $(n-2)$ modi i pezzi tra gli $N-2$ rimasti. Quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_k \cap A_j) &= \frac{c_f}{c_p} = \frac{m(m-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)}{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)} \\ &= \frac{m(m-1)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

c) Le probabilità calcolate nei punti precedenti non dipendono dalle posizioni k e j. Quindi neppure dalla differenza $j-k$. Si ha

$$\mathbf{P}(A_{30}) = \frac{35}{140} = 0.25, \quad \mathbf{P}(A_{30} \cap A_{31}) = \frac{35 \cdot 34}{140 \cdot 139} = 0.0612.$$

Esercizio 3.4 (Es 3 del 17/6/02)**.** *Il commissario tecnico della nazionale di calcio può scegliere gli 11 giocatori della squadra da schierare in una partita tra 2 portieri, 8 difensori, 6 centrocampisti e 6 attaccanti. Si supponga che una squadra debba essere composta da un portiere, 3 difensori, 4 centrocampisti, e 3 attaccanti.*

a) In quanti modi diversi può formare la squadra il commissario tecnico?

b) Se dei 6 attaccanti due giocano nell'Inter, qual'è la probabilità che non capitino questi attaccanti nella squadra?

Ciascun gruppo (portieri, difensori, centrocampisti, attaccanti) si può considerare un'urna che contiene un certo numero di palline (rispettivamente 2, 8, 6, 6). Da ciascuna di queste urne si devono effettuare un certo numero di estrazioni, senza riposizione e per le quali non ha importanza l'ordine (rispettivamente 1, 3, 4, 3).

a) I casi possibili sono dati da

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{6}{3} = 33600$$

b) I casi favorevoli sono

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{3} = 6720$$

La probabilità richiesta è 0.2.

Esercizio 3.5 (Es 2 del 30/6/00)**.** *Una pompa idraulica di un grosso impianto industriale è dotata di 7 filtri dello stesso tipo la cui manutenzione deve essere fatta gli ultimi tre giorni di ogni mese. Se la manutenzione di ognuno dei 7 filtri è assegnata in modo casuale ad ognuno dei tre giorni, calcolare:*

a) la probabilità che tutte le manutenzioni capitino in un solo giorno;

b) la probabilità che ad ogni giorno venga assegnata almeno una manutenzione;

c) la probabilità che agli ultimi due giorni siano assegnate almeno due manutenzioni.

Si tratta di un problema di assegnazione di 7 oggetti indistinguibili (non abbiamo motivo di considerare i filtri come oggetti distinguibili) a 3 urne distinte. I casi possibili risultano pertanto:

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!2!} = 36.$$

a) I casi favorevoli sono 3, tanti quante le urne in cui possiamo assegnare tutti gli oggetti. La probabilità richiesta, p, è

$$p = \frac{3}{36} = 0.0833.$$

b) In ogni urna ci deve essere almeno un oggetto. Ne rimangono 4 da assegnare alle 3 urne. I casi favorevoli sono

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

La probabilità richiesta, p, è

$$p = \frac{15}{36} = 0.4167.$$

b) Nelle ultime due urne vi devono essere due oggetti. Rimangono 3 oggetti da assegnare alle 3 urne. I casi favorevoli sono

$$\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

La probabilità richiesta, p, è

$$p = \frac{10}{36} = 0.2778.$$

Esercizio 3.6 (Es 1 del 2/7/93)**.** *La costruzione di nove apparecchiature dello stesso tipo deve essere programmata nell'arco dei 5 giorni lavorativi di una settimana. Ogni singola apparecchiatura richiede un intero giorno di lavoro ma, più apparecchiature possono essere costruite in un singolo giorno. La costruzione di ognuna delle 9 apparecchiature è assegnata in modo casuale ad ognuno dei 5 giorni lavorativi della settimana. Si determinino:*

a) la probabilità che ad ogni giorno venga assegnata la costruzione di almeno una macchina;

b) la probabilità che al primo giorno siano assegnate almeno 2 macchine ed ai restanti 4 giorni almeno una;

c) la probabilità che nel primo giorno siano assegnate almeno due apparecchiature dato che ad ogni giorno ne è stata assegnata almeno una.

a) Indichiamo con A l'evento di cui è richiesta la probabilità . Le 9 apparecchiature possono essere considerate come 9 oggetti indistinguibili da assegnare a 5 urne distinguibili (i 5 giorni lavorativi). I modi in cui possono essere effettuate queste assegnazioni sono

$$\binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{9} = \frac{13!}{9!4!} = 715.$$

I casi favorevoli all'evento A sono le assegnazioni che non lasciano urne vuote. Per contarli, poniamo un oggetto in ogni urna, ne rimangono 4 che possono essere assegnati ad una qualunque delle 5 urne, quindi:

$$\binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70.$$

Quindi essendo le assegnazioni effettuate in modo casuale, $\mathbf{P}(A) = \frac{70}{715} = 0.0979$.
b) Indichiamo con B l'evento di cui è richiesta la probabilità . Per determinare la $\mathbf{P}(B)$ basta contare le assegnazioni con almeno due oggetti nella prima urna e almeno uno nelle altre. Per contarle poniamo 2 oggetti nella prima urna e un oggetto in ognuna delle altre 4 urne. Rimangono $9-2-4 = 3$ oggetti da assegnare ad una qualunque delle 5 urne. Quindi i casi favorevoli all'evento B sono:

$$\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

e la probabilità richiesta è $\mathbf{P}(B) = \frac{35}{715} = 0.0490$.
c) Sia A l'evento introdotto al punto a) e C l'evento *"almeno 2 apparecchiature il primo giorno*. Dobbiamo calcolare $\mathbf{P}(C|A)$. Questa, per definizione di probabilità condizionata, è pari a

$$\mathbf{P}(C|A) = \frac{\mathbf{P}(C \cap A)}{\mathbf{P}(A)}\,.$$

Osserviamo che l'evento $C \cap A$ è in realtà l'evento B introdotto al punto b). Quindi

$$\mathbf{P}(C|A) = \frac{\mathbf{P}(C \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.7 (Es 2 del 16/5/94)**.** *Un distributore automatico di bevande permette di scegliere tra sei tipi differenti: A, B, C, D, E ed F. Se 10 scelte si ripartiscono a caso tra le bevande, nell'ipotesi di equiprobabilità , qual è la probabilità che*

a) A non sia scelta;

b) A sia scelta una volta;

c) A sia scelta almeno una volta;

d) ogni bevanda sia scelta almeno una volta;

e) D, E ed F siano scelte almeno una volta;

f) esattamente tre bevande non siano scelte.

I casi possibili in questo modello sono tutti i possibili campioni non ordinati di 10 elementi estratti da un'urna contenente 6 palline (le bevande). Essi sono in numero di $\binom{10+6-1}{10}$.
a) I casi favorevoli sono i campioni di 10 elementi in cui non compare A. Questi sono tanti quanti i campioni di 10 elementi non ordinati estratti da un'urna contenente 5 palline. La probabilità richiesta, indicata con p è

$$p = \frac{\binom{10+5-1}{10}}{\binom{10+6-1}{10}} = \frac{\binom{14}{10}}{\binom{15}{10}} = \frac{1}{3}.$$

b) Per calcolare i casi favorevoli ragioniamo in questo modo. Uno dei 10 posti del campione lo occupo con A. Gli alti nove li posso occupare con una qualunque delle 5 bevande rimaste. Quindi la probabilità richiesta, indicata ancora con p è

$$p = \frac{\binom{9+5-1}{9}}{\binom{15}{10}} = 0.238.$$

c) In questo caso blocchiamo uno dei 10 posti nel campione per A e negli altri nove posso mettere una qualunque delle 6 bevande (posso ancora scegliere A). La probabilità richiesta, indicata ancora con p è

$$p = \frac{\binom{9+6-1}{9}}{\binom{15}{10}} = \frac{2}{3}.$$

Si noti che tale probabilità può essere ricavata dal punto a) osservando che l'evento specificato al punto a) è il complementare di quello definito in questo punto.
d) In questo caso blocchiamo 6 posti dei 10 per metterci in ognuno una delle 6 bibite. Gli altri 4 posti li posso riempire come voglio con una qualunque delle 6 bevande. La probabilità richiesta, indicata ancora con p è

$$p = \frac{\binom{4+6-1}{4}}{\binom{15}{10}} = 0.042.$$

e) In questo caso blocchiamo 3 posizioni delle 10, le altre 7 posso riempirle con una qualunque delle bevande. La probabilità richiesta, indicata ancora con p è

$$p = \frac{\binom{7+6-1}{7}}{\binom{15}{10}} = 0.2637.$$

f) Eliminiamo 3 bevande. Ne rimangono 3 che dobbiamo scegliere almeno una volta, per cui occupiamo 3 posti dei 10 da riempire. Rimangono 7 posti che posso riempire con una qualunque delle tre bibite rimaste. Inoltre, poiché non era specificato quale delle tre bevande fossero eliminate, devo moltiplicare per il numero di modi in cui posso scegliere tre bevande tra sei, cioè $\binom{6}{3}$. La probabilità richiesta, indicata ancora con p è

$$p = \frac{\binom{6}{3}\binom{7+3-1}{7}}{\binom{15}{10}} = 0.2398.$$

Esercizio 3.8 (Es 1 del 21/1/94). *Una località sciistica dispone di 18 piste di discesa. Di queste 5 sono classificate come piste verdi, 7 come blu, 4 come rosse e 2 come nere. Gli sciatori A e B sono in grado di affrontare tutti i diversi tipi di piste, lo sciatore C tutte le piste escluse quelle nere, mentre lo sciatore D solo le piste verdi e blu. All'inizio di* *ogni giornata, delle sette di una settimana bianca, ciascuno dei quattro sciatori sceglie a caso che pista affrontare per prima (tra quelle che è in grado di affrontare). Qual'è la probabilità che:*

a) la pista scelta dallo sciatore A e dallo sciatore B sia la stessa in almeno un giorno;

b) lo sciatore B e C non scelgano mai la stessa pista;

c) nel primo giorno la pista scelta dallo sciatore C e dallo sciatore D sia la stessa;

d) tutti i 4 sciatori non scelgano la stessa pista in ognuno dei sette giorni.

a) Per calcolare la probabilità p che lo sciatore A e B scelgano la stessa pista in un giorno prefissato, osserviamo che i modi possibili in cui A e B possono scegliere le piste tra le 18 che hanno a disposizione sono 18^2. I modi in cui possono sceglierle in modo che siano la stessa sono 18. Quindi $p = \frac{1}{18}$ e la probabilità che sia diversa in un giorno prefissato è $1 - p = \frac{17}{18}$. La probabilità che in 7 giorni scelgano sempre piste diverse è data da $(1-p)^7 = \left(\frac{17}{18}\right)^7$. Poiché l'evento che in 7 giorni scelgano sempre piste diverse è l'evento complementare a quello del quale è richiesta la probabilità possiamo dire che quest'ultima è pari a

$$1 - (1-p)^7 = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^7.$$

b) il numero di modi in cui lo sciatore B e C possono scegliere la pista è $16 \cdot 18$. Il numero di modi in cui possono scegliere la stessa sono 16. Quindi la probabilità che gli sciatori B e C scelgano la stessa pista è $p = \frac{1}{18}$. La probabilità che non scelgano la stessa pista in un giorno è $1 - p = \frac{17}{18}$ e la probabilità che non scelgano la stessa pista in 7 giorni è

$$(1-p)^7 = \left(\frac{17}{18}\right)^7.$$

c) Gli sciatori C e D possono scegliere la pista in $16 \cdot 12$ modi diversi. Il numero di modi in cui possono scegliere la stessa è 12. Quindi la probabilità richiesta è $p = \frac{1}{16}$.
d) I 4 sciatori possono scegliere le piste in $18 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 12$ modi diversi. Il numero di modi in cui possono scegliere la stessa è 12. Quindi la probabilità che tutti e quattro scelgano la stessa pista in un giorno è $p = \frac{1}{18 \cdot 18 \cdot 16}$. La probabilità che tutti gli sciatori non scelgano la stessa pista in un giorno è $1 - p = 1 - \frac{1}{18 \cdot 18 \cdot 16}$. La probabilità richiesta è

$$(1-p)^7 = \left(1 - \frac{1}{18 \cdot 18 \cdot 16}\right)^7.$$

Esercizio 3.9 (Es 2 del 26/5/97). *Prosegue dall'esercizio 3.43.*
Ogni pezzo scartato viene immediatamente marcato con un numero progressivo di identificazione per essere successivamente inviato al laboratorio assieme al rapporto di verifica del reparto di produzione. Dopo alcuni giorni, al momento di recuperare i 5 pezzi difettosi accumulatisi, ci si accorge che tali pezzi sono stati erroneamente mescolati coi buoni, inviati al magazzino e inseriti casualmente nelle 4 confezioni destinate ai 4 clienti A, B, C e D e che, quindi, non è più possibile risalire in quali confezioni sono stati inseriti, né a quali clienti sono stati spediti. Calcolare la probabilità che i due clienti A e C non abbiano ricevuto alcuno dei 5 pezzi difettosi.

Le quattro confezioni possono essere identificate con 4 scatole A, B, C, D e i 5 pezzi difettosi con 5 palle. Le 5 palle possono finire nelle 4 scatole in 4^5 modi diversi; 4^5 sono quindi i casi possibili in cui i cinque pezzi difettosi possono finire nelle 4 confezioni casualmente. Eliminiamo le scatole A e C, rimangono dunque due scatole e le 5 palle possono finirci dentro in 2^5 modi diversi. 2^5 sono quindi i casi favorevoli in cui le confezioni destinate ai clienti A e C rimangono senza pezzi difettosi. La probabilità cercata è :

$$p = \frac{2^5}{4^5} = \left(\frac{1}{2}\right) = 0.031.$$

Si osservi che il fatto che rimangano vuote le scatole A e C piuttosto che altre due qualunque fissate è la stessa. Si pensi a quanto vale la probabilità che due qualunque scatole rimangano vuote. Si osservi anche che chiedere che le scatole A e C rimangano vuote (o due altre o almeno due) non esclude che anche una terza scatola sia vuota. Chiaramente tutte quattro le scatole non possono essere vuote: dove metterei tutte le 5 palle?

Esercizio 3.10 (Es 1 del 17/5/99)**.** *Una società di consulenza ha ricevuto da parte di un ente pubblico il compito di selezionare i membri di una commissione che dovrà valutare i progetti presentati per vincere l'appalto di una grande opera pubblica. La commissione deve essere composta da sette persone di cui tre accademici, due industriali e due esponenti politici della maggioranza al governo nel comune in questione. La società deve scegliere i membri da una rosa di candidati composta da otto accademici, sei industriali e cinque esponenti politici della maggioranza.*

- *a) In quanti modi diversi può essere formata la commissione?*
- *b) Se dei sei industriali due sono donne, trovare la probabilità che nella commissione vi siano queste due donne.*
- *c) La commissione si riunisce ad un tavolo dove ogni posto reca il nome del membro della commissione. Se ogni membro si siede a caso qual'è la probabilità che nessuno dei membri sia seduto al posto giusto? Qual'è la probabilità che almeno uno lo sia?*

a) Le scelte della commissione possono essere effettuate in

$$\binom{8}{3}\binom{6}{2}\binom{5}{2} = \frac{8!}{3!5!}\frac{6!}{4!2!}\frac{5!}{3!2!} = 56 \cdot 15 \cdot 10 = 8400$$

modi.
b) I casi possibili sono quelli calcolati al punto a). I casi favorevoli sono $\binom{8}{3}\binom{5}{2} = 560$, in quanto i due membri da scegliere tra gli industriali sono

fissati (le due donne industriali) e posso scegliere solo tra gli altri gruppi, come richiesto, i restanti 5 membri. Quindi

$$p = \frac{\binom{8}{3}\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}\binom{6}{2}\binom{5}{2}} = \frac{560}{8400} = 0.0667.$$

c) Si tratta di determinare il numero delle permutazioni aventi zero coincidenze tra le permutazioni di sette elementi. Dalle tavole delle coincidenze si ricava che la probabilità richiesta è

$$p(0,7) = \frac{C(0,7)}{7!} = \frac{1854}{5040} = 0.3679,$$

dove abbiamo indicato con $C(r,n)$ il numero di permutazioni con r coincidenze tra le permutazioni di n elementi, e con $p(r,n)$ la probabilità di ottenere una tale permutazione. La probabilità dell'evento A che *vi sia almeno una coincidenza* si ottiene come complementare dell'evento considerato sopra (che non vi siano coincidenze).

$$\mathbf{P}(A) = 1 - p(0,7) = 1 - 0.3679 = 0.6321.$$

Esercizio 3.11 (Es 2 del 21/7/97)**.** *Quattro qualsiasi vertici tra quelli degli n^2 quadratini che costituiscono le piastrelle di una struttura quadrata di lato n danno origine ad una determinata configurazione operativa. Se i quattro vertici formano un quadrato con i lati paralleli a quelli della struttura la configurazione corrisponde ad un errore del sistema. Nell'ipotesi che i quattro vertici vengano scelti casualmente, dimensionare la scheda (cioè trovare il valore minimo di n) affinché la probabilità di avere un errore sia minore a 10^{-6}.*

Si tratta di un modello probabilistico equiprobabile in cui lo spazio degli eventi elementari è costituito da tutte le configurazioni possibili di 4 vertici da scegliersi tra gli $(n+1)^2$ vertici quando la struttura è formata da n^2 quadratini. I casi possibili sono dunque:

$$\binom{(n+1)^2}{4}$$

Per determinare la probabilità di avere un errore dobbiamo contare i casi favorevoli, cioè in quanti modi posso scegliere 4 vertici in modo che formino un quadrato come richiesto dal testo. Cominciamo a capire che succede con n piccolo. Nel caso $n = 1$ abbiamo 4 vertici e solo una configurazione favorevole. Se indichiamo con q_n le configurazioni favorevoli al passo n abbiamo $q_1 = 1$. Passiamo al caso $n = 2$. Abbiamo abbiamo 9 vertici. Le configurazioni favorevoli sono quelle che avevamo per $n = 1$ (cioè 1) più quelle che possiamo formare di nuove, che sono $2 \cdot (n) - 1 = 3$ quadrati di lato $k = 1$ e 1 quadrato di lato $k = 2(= n)$ Quindi $q_2 = q_1 + 1 + 3 = 1 + 2^2$. In generale se passo da $n - 1$ a n lati abbiamo che

$$q_n = q_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2(n-k) - 1.$$

Si tratta della somma dei primi n numeri dispari che si dimostra essere uguale a n^2. Infatti, la somma dei primi n numeri pari può essere espressa come 2 volte la somma dei primi n numeri interi, e quindi è pari a $n(n+1)$ (vedi formula (A.10) in appendice). Ora la somma dei primi n numeri dispari può essere vista come la somma dei primi n numeri pari a ciascuno dei quali ho tolto una unità. Da cui segue il risultato. Quindi possiamo esprimere q_n come

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La probabilità di avere una configurazione che corrisponde ad un errore è quindi

$$\frac{\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}}{\binom{(n+1)^2}{4}} = \frac{4(2n+1)}{(n+1)(n+2)(n^2+2n-1)(n^2+2n-2)}.$$

Il valore di n richiesto lo si trova risolvendo la disequazione

$$\frac{4(2n+1)}{(n+1)(n+2)(n^2+2n-1)(n^2+2n-2)} < 10^{-6}$$

Si trova che il minimo n che soddisfa la relazione sopra è $n = 23$.

Esercizio 3.12 (Es 2 del 17/5/93)**.** *Per uno studente che accoppia in modo casuale 8 grafici di densità e 8 grafici di funzione di ripartizione qual è la probabilità :*

a) di riportare almeno un accoppiamento corretto;

b) di rispondere in modo sufficiente se si considerano sufficienti le risposte con almeno 4 accoppiamenti corretti.

a) Indichiamo con $p(r, n)$ la probabilità che ci siano r assegnazioni corrette nell'assegnazione casuale di n oggetti. La probabilità richiesta p che vi via almeno un'assegnazione corretta nell'assegnazione casuale di 6 oggetti è dunque

$$p = \sum_{r=1}^{6} p(r, 6) = 1 - p(0, 6) = 1 - 0.36805 = 0.63195.$$

Ricordiamo che il valore di $p(r, n)$ lo si può ricavare dalle tavole delle coincidenze di r oggetti in permutazioni di n oggetti. Infatti se indichiamo con $C(r, n)$ il numero permutazioni di n oggetti con r coincidenze, abbiamo $p(r, n) = \frac{C(r,n)}{n!}$ e nel nostro caso

$$p(0, 6) = \frac{C(0, 6)}{6!}\frac{265}{720} = 0.36805.$$

Ricordiamo inoltre che $p(0, n)$ può essere calcolata direttamente. Infatti

$$p(0, n) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots (-)^n \frac{1}{n!},$$

e quindi nel nostro caso

$$p(0, 6) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 0.36805.$$

b) La probabilità richiesta è data da

$$\sum_{r=4}^{6} p(r, 6) = \sum_{r=4}^{6} \frac{C(r, 6)}{6!} = \frac{15}{720} + 0 + \frac{1}{720} = 0.0222,$$

dove i valori di $C(r, 6)$ sono stati ricavati dalla tavola delle coincidenze.

Esercizio 3.13 (Es 1 del 8/7/96). *Due valvole (M e N) possono essere inserite su un circuito in differenti modi. Consideriamo un intervallo di tempo t e indichiamo con A l'evento: si guasta la valvola M e con B l'evento: si guasta la valvola N. Sia* $\mathbf{P}(A) = 0.5$ *e* $\mathbf{P}(A \cup B) = 0.7$. *Calcolare* $\mathbf{P}(B)$ *nei tre casi:*

a) A e B sono indipendenti;

b) A e B sono incompatibili;

c) $\mathbf{P}(A|B) = 0.5$.

a) Se A e B sono indipendenti si ha

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

È noto che

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B). \tag{3.1}$$

Dalla relazione tra le probabilità si deduce allora:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$

da cui si ricava, sostituendo le probabilità note

$$0.7 = 0.5 + \mathbf{P}(B) - 0.5\mathbf{P}(B),$$

e quindi il valore di $\mathbf{P}(B)$: $\mathbf{P}(B) = 0.4$.
b) Se A e B sono incompatibili, allora $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$. La relazione (3.1) diventa allora,

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

e quindi si ricava $0.7 = 0.5 - \mathbf{P}(B)$, da cui $\mathbf{P}(B) = 0.2$.
c) Dalla definizione di probabilità condizionata ricaviamo

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B).$$

In questo caso la (3.1) diviene

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B),$$

nella quale se sostituiamo i valori dati dal testo otteniamo

$$0.7 = 0.5 + \mathbf{P}(B) - 0.5\mathbf{P}(B)$$

da cui $\mathbf{P}(B) = 0.4$.

Esercizio 3.14 (Es 1 del 10/6/96)**.** *A valle di una linea di produzione di pezzi ad elevata tecnologia operano r $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ stazioni mobili di collaudo preposte a certificare la qualità della produzione in quanto destinata ad un impiego ad alto rischio; la procedura di ispezione prevede che ognuna delle stazioni in opera abbia sempre la stessa probabilità $p = \frac{1}{r}$ di essere casualmente scelta per essere sottoposta al test di taratura (ispezione) da parte dell'ispettore designato dal competente istituto di controllo.*

a) Trovare il numero n di ispezioni da programmare affinché sia di $T = 0.99$ la probabilità che la stazione A_2 venga ispezionata almeno una volta se operano $r = 6$ stazioni.

b) Il numero di ispezioni programmate per il secondo semestre del corrente anno è $n = 20$ (sempre con la medesima procedura di scelta) e, da contratto, le stazioni in opera sono 8: calcolare la probabilità che la stazione A_2 riceva almeno un'ispezione.

c) In un'altra linea di fabbricazione, dove le ispezioni dell'Istituto di Controllo si effettuano sempre con la stessa procedura, le stazioni in opera sono il doppio, cioè 16; l'Istituto decide di programmare anche le ispezioni in numero doppio, cioè 40, convinto che così facendo rimanga uguale per le due fabbriche la probabilità per una stazione di ricevere almeno un'ispezione. L'Istituto opera correttamente? Giustificare la risposta.

a) La probabilità che facendo n scelte casuali, la seconda stazione non sia mai scelta è

$$p = \left(\frac{r-1}{r}\right)^n,$$

di conseguenza la probabilità che sia scelta almeno una volta è

$$1 - p = 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^n. \tag{3.2}$$

Dobbiamo trovare il valore di n affinché $1 - p$ sia maggiore di 0.99, vale a dire

$$\begin{aligned} 1 - p = 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^n &\geq 0.99; \\ \left(\frac{r-1}{r}\right)^n &\leq 0.01; \\ n \ln\left(\frac{r-1}{r}\right) &\leq \ln 0.01; \\ n &\geq 25.25. \end{aligned}$$

Per cui il numero di ispezioni da programmare è $n = 26$.
b) Abbiamo visto nel punto precedente che la probabilità che la seconda stazione riceva almeno un'ispezione è data dalla (3.2). Quindi per $n = 20$, ed $r = 8$ ricaviamo

$$1 - p = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{20}; \quad p = \left(\frac{7}{8}\right)^{20}; \quad p = 0.0692; \quad 1 - p = 0.9308.$$

Quindi la probabilità richiesta è $p = 0.93$.
c) La probabilità che una stazione riceva il almeno un controllo varia al variare di n ed r secondo la (3.2). Risulta quindi chiaro che raddoppiando sia n che r la probabilità $1-p$ non rimane costante. In effetti se si calcola il valore della (3.2) per $n = 40$ e $r = 16$ si ottiene $1 - p = 0.92$.

3.2 Probabilità Condizionata, teorema di Bayes

Esercizio 3.15 (Es 1 del 18/4/00)**.** *Uno studente si trova ad affrontare un test per l'ammissione ad un corso di laurea che consiste in 50 domande con risposta a scelta multipla per ciascuna delle quali sono previste*

6 risposte alternative. Se lo studente conosce la risposta, risponde correttamente, se non la conosce, cerca di indovinare la risposta scegliendo casualmente una delle 6 risposte a disposizione. Supponendo che la probabilità che lo studente conosca la risposta ad una domanda sia $\frac{40}{50}$ *e che la risposta a ciascuna domanda venga data indipendentemente da quella data nelle altre, calcolare*

a) la probabilità che lo studente risponda correttamente a una domanda e la probabilità che risponda correttamente a tutte le 50 domande;

b) la probabilità che lo studente conosca realmente la risposta ad una domanda dato che ha risposto correttamente a quella domanda.

Definiamo gli eventi, per $i = 1, \dots 50$,

$$A_i = \{\text{lo studente risponde correttamente alla domanda } i\}$$

e

$$B_i = \{\text{lo studente conosce la risposta alla domanda } i\}.$$

Dal testo sappiamo che $P(B_i) = \frac{40}{50}$, $P(A_i|B_i) = 1$ e $P(A_i|B_i^c) = \frac{1}{6}$.
a) Dobbiamo calcolare

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{50}) = (P(A_1))^{50}.$$

L'uguaglianza è valida in quanto si è supposto che le risposte alle domande siano date indipendentemente le une dalle altre. Calcoliamo dunque $P(A_1)$ utilizzando il teorema delle probabilità totali:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|B_1)P(B_1) + P(A_1|B_1^c)P(B_1^c) = \frac{40}{50} \cdot 1 + \frac{10}{50} \cdot \frac{1}{6} \\ &= 0.8333. \end{aligned}$$

Quindi la probabilità che risponda correttamente a 50 domande è

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{50}) = P(A_1)^{50} = 0.8333^{50} = 0.0002.$$

b) Dobbiamo calcolare $P(B_i|A_i)$. Utilizziamo il teorema di Bayes:

$$\begin{aligned} P(B_i|A_i) &= \frac{P(A_i|B_i)P(B_i)}{P(A_i)} = \frac{P(A_i|B_i)P(B_i)}{P(A_1|B_1)P(B_1) + P(A_1|B_1^c)P(B_1^c)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{40}{50}}{\frac{40}{50} \cdot 1 + \frac{10}{50} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{0.8}{0.8333} = 0.9600. \end{aligned}$$

Esercizio 3.16 (Es 1 del 16/6/97)**.** *Un treno è formato da 4 carrozze. La probabilità dell'evento D_i che l'i-esima carrozza sia difettosa è $\frac{1}{10}$ (indipendentemente dalle altre carrozze). Le carrozze vengono esaminate indipendentemente da due verificatori, che hanno probabilità di riscontrare eventuali difetti di $\frac{9}{10}$ e di $\frac{7}{10}$ rispettivamente (non può invece verificarsi il caso che rilevino difetti che non ci sono). Qualora vengano riscontrati dei difetti, si ha un ritardo nella partenza del treno. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:*

a) C_i : non vengono riscontrati difetti nella carrozza i-esima;

b) R : il treno parte in ritardo;

c) S : il treno non ha vetture difettose;

d) T : il treno parte in orario con vetture difettose non scoperte.

e) Sapendo che il treno è partito in orario, la probabilità che abbia delle vetture difettose.

Consideriamo gli eventi

$$\begin{aligned} A_i &= \text{“il primo verificatore trova il difetto sulla carrozza } i \\ B_i &= \text{“il secondo verificatore trova il difetto sulla carrozza } i \end{aligned}$$

Dal testo deduciamo

$$\begin{aligned} P(A_i|D_i) &= \frac{9}{10} & P(B_i|D_i) &= \frac{7}{10} \\ P(A_i|D_i^C) &= 0 & P(B_i|D_i^C) &= 0. \end{aligned}$$

a) L'evento C_i può essere riscritto come

$$C_i = D_i^C \cup \left(A_i^C \cap B_i^C \cap D_i\right)$$

e quindi poiché gli eventi D_i^C e $A_i^C \cap B_i^C \cap D_i$ sono disgiunti e per l'indipendenza degli eventi A_i e B_i dato che ci sia il difetto possiamo ricavare

$$\begin{aligned} P\left(C_i\right) &= P\left(D_i^C\right) + P\left(A_i^C | D_i\right) P\left(B_i^C | D_i\right) P\left(D_i\right) \\ &= \frac{9}{10} + \frac{1}{10}\frac{3}{10}\frac{1}{10} = \frac{903}{1000} \\ &= 0.903 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(R) = 1 - P\left(R^c\right) 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} C_i\right) &= 1 - \prod_{i=1}^{4} P\left(C_i\right) \\ = 1 - \left(\frac{903}{1000}\right)^4 = 0.335 \end{aligned}$$

c)

$$P(S) = P\left(\bigcap_{i=1}^{4} D_i^c\right) = \prod_{i=1}^{4} P\left(D_i^c\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0.66$$

d) L'evento

$$R^c = \text{“}\textit{il treno parte in orario}$$

è possibile esprimerlo come unione degli eventi disgiunti S e T: $R^c = S \cup T$. Quindi $P(R^c) = P(S) + P(T)$ e

$$P(T) = P(R^c) - P(S) = \left(\frac{903}{1000}\right)^4 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0.009.$$

e) La probabilità richiesta è

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} D_i \,|R^c)\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{4} D_i \cap R^c\right)}{P(R^c)} = \frac{P(T)}{P(R^c)} = \frac{0.009}{0.665} = 0.0135.$$

Esercizio 3.17 (Es 1 del 8/9/97)**.** *Durante la lavorazione di un ordinativo, l'impianto di produzione di una fabbrica ha una probabilità π_n di subire n interruzioni espressa dal seguente modello:*

$$\pi_n = \frac{p^n}{b} \quad n = 1, 2, \ldots; \quad b > 0; \quad 0 < p < 1.$$

Le interruzioni possono essere di soli due tipi: M (meccaniche, idrauliche, etc.) o E (elettriche, elettroniche, etc.) e risulta $\mathbf{P}(M) = \mathbf{P}(E) = 0,5$. Per un ordinativo scelto a caso e messo in lavorazione:

a) determinare la probabilità π_0 che non si verifichi nessuna interruzione; quindi calcolare π_0 quando nel modello è $p = 0,4$ e $b = 1,25$;

b) determinare la probabilità u_n che fra le interruzioni ve ne siano esattamente n del tipo E; quindi calcolare u_n per $n = 3$ quando nel modello è $p = 0,4$ e $b = 1,25$.

Indichiamo con $A=$ "*non si sono verificate interruzioni* l'evento di cui è richiesta la probabilità. Chiaramente

$$A^C = \text{“}\textit{si è verificata almeno una interruzione} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k,$$

dove abbiamo introdotto gli eventi

$$A_k = \text{“}\textit{si sono verificate esattamente } k \textit{ interruzioni.}$$

Poiché gli insiemi A_k sono disgiunti e $\mathbf{P}(A_k) = \pi_k$ risulta quindi

$$\pi_0 = \mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(A^C) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k}{b} = 1 - \frac{1}{b}\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

Vedi formula (A.3) dell'Appendice. Sostituendo i valori $p = 0,4$ e $b = 1,25$ otteniamo $\pi_0 = 0,47$. Introduciamo gli eventi

$$E_n = \text{“}\textit{si sono verificate esattamente } n \textit{ interruzioni di tipo E.}$$

Nel caso in cui le interruzioni siano meno di n (si è verificato l'evento A_{n+k} con $-n \leq k < 0$) abbiamo $\mathbf{P}(E_n|A_{n+k}) = 0$. Se le interruzioni sono $n+k$ con $k \geq 0$, essendo $\frac{1}{2}$ la probabilità che si verifichi un interruzione di tipo E abbiamo

$$\mathbf{P}(E_n|A_{n+k}) = \binom{n+k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^k = \binom{n+k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}.$$

Per il teorema delle probabilità totali la probabilità cercata è data da

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E_n) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(E_n \cap A_{n+k})\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(E_n \cap A_{n+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(E_n|A_{n+k})\mathbf{P}(A_{n+k}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\frac{p^{n+k}}{b}.\end{aligned}$$

Questa serie può essere calcolata grazie alla formula (A.4) dell'appendice, tenendo presente la formula (A.5) di riscrittura del coefficiente binomiale. Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}\left(\frac{1}{2}p\right)^{n+k} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{2}p\right)^{n+k} \\ &= p^n\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+1+k-1}{k}\left(\frac{1}{2}p\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}p\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}p\right)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{P}(E_n) = \frac{1}{b}\frac{2p^n}{(2+p)^{n+1}}$ da cui sostituendo i valori assegnati otteniamo

$$\mathbf{P}(E_3) = 0,156.$$

Esercizio 3.18 (Es 2 del 20/9/93)**.** *Un processo produttivo produce componenti che possono presentare tre tipi di difetti A, B e C. La probabilità che venga prodotto un pezzo con tutti e tre i difetti è $\mathbf{P}(A\cap B\cap C) = 0.1$. Le probabilità di ottenere pezzi con due dei tre difetti sono $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A\cap C) = \mathbf{P}(B\cap C) = 0.2$. Le probabilità di ottenere pezzi con uno dei tre difetti sono $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 0.4$. Si calcolino:*

a) la probabilità di ottenere un pezzo con almeno un difetto;

b) la probabilità di ottenere un pezzo senza difetti;

c) la probabilità che su 10 pezzi tre siano esenti da difetti nell'ipotesi che i pezzi siano prodotti indipendentemente l'uno dall'altro.

a) Dobbiamo calcolare $\mathbf{P}(A \cup B \cup C)$ che per il teorema di inclusione ed esclusione è data da:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) \\ - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0.7.\end{aligned}$$

b) Dobbiamo calcolare $\mathbf{P}(A^c \cap B^c \cap C^c)$. Questa è data da

$$\mathbf{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B \cup C) = 0.3.$$

c) Per rispondere a questo quesito dobbiamo considerare la v.c X che conta il numero di pezzi senza difetti su un'estrazione di 10 pezzi. Si tratta di una v.c Binomiale con parametri $p = 0.3$ e $n = 10$. La probabilità richiesta è data da

$$\mathbf{P}(X = 3) = \binom{3}{10} 0.3^3 0.7^7 = 0.266.$$

Esercizio 3.19 (Es 1 del 19/9/94). *Due linee di fabbricazione hanno ultimato* 18 *identici pezzi che sono stati depositati in tre distinti cesti di raccolta: il primo cesto con* 7 *pezzi di cui* 2 *dalla prima linea e* 5 *dalla seconda. Il secondo cesto con 4 pezzi di cui* 2 *dalla prima linea e il terzo cesto con* 7 *pezzi di cui* 4 *fabbricati dalla prima linea. Si esegue un'ispezione dimensionale ad un pezzo scelto a caso dal primo cesto che, poi però viene depositato nel secondo cesto; quindi dal secondo cesto si estrae casualmente un pezzo che, dopo il controllo, viene rimesso nel terzo cesto; infine viene collaudato un pezzo scelto a caso dal terzo cesto e rimesso nel primo cesto. Determinare la probabilità che la composizione finale dei tre contenitori sia rimasta immutata rispetto al mix di provenienza dei pezzi tra le due linee di produzione.*

Indichiamo con i simboli A_i B_i C_i per $i = 1, 2$ rispettivamente gli eventi corrispondenti al fatto di aver estratto un pezzo prodotto dalla i-esima linea produttiva dal primo cesto, dal secondo cesto, dal terzo cesto. Per intenderci, B_2 significa che ho estratto un pezzo prodotto dalla seconda linea dal secondo cesto. La probabilità richiesta p è esprimibile come

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}\left(A_1 \cap B_1 \cap C_1\right) + \mathbf{P}\left(A_2 \cap B_2 \cap C_2\right) \\ &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B_1|A_1)\mathbf{P}(C_1|B_1 \cap A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B_2|A_2)\mathbf{P}(C_2|B_2 \cap A_2) \\ &= \frac{2}{7}\frac{3}{5}\frac{5}{8} + \frac{5}{7}\frac{3}{5}\frac{4}{8} = \frac{9}{28}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.20 (Es 3 del 22/4/02)**.**

Un venditore possiede sei DVD-R danneggiati. Decide di correre il rischio di venderli lo stesso inserendoli nelle scatole di dischi non danneggiati. Prende quindi dallo scaffale 3 confezioni da sei DVD-R l'una. Nella prima scatola inserisce un disco danneggiato al posto di uno non danneggiato, nella seconda ne inserisce due danneggiati e nella terza tre. Si trova dunque con sei dischi non danneggiati che inserisce in una confezione vuota. Le quattro scatole sono rimesse sullo scaffale.

a) Si supponga che un cliente del negozio scelga a caso una delle quattro scatole. Da questa estrae, sempre casualmente un disco. Calcolare la probabilità che il disco estratto sia danneggiato.

b) Si supponga che il disco estratto non sia danneggiato. Qual'è la probabilità che provenga dalla scatola che non contiene dischi danneggiati?

Denotiamo con S_i per $i = 1, 2, 3, 4$ l'evento corrispondente alla scelta della scatola i-esima e con D l'evento corrispondente all'estrazione di un DVD-R danneggiato. Dal testo abbiamo $\mathbf{P}(S_i) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(D|S_1) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(D|S_2) = \frac{2}{6}$, $\mathbf{P}(D|S_3) = \frac{3}{6}$, $\mathbf{P}(D|S_4) = 0$.

a) Dal teorema delle probabilità totali abbiamo

$$\mathbf{P}(D) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(D|S_i)\mathbf{P}(S_i) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 0\right) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

b) Sia D^c l'evento corrispondente all'estrazione di un DVD-R non danneggiato. Dal teorema di Bayes abbiamo

$$\mathbf{P}(S_4|D^c) = \frac{\mathbf{P}(D^c|S_4)\mathbf{P}(S_4)}{\mathbf{P}(D^c)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \mathbf{P}(D)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 3.21 (Es 1 del 17/6/02)**.** *Una ditta che produce ami da pesca possiede due macchine una delle quali produce pezzi difettosi con una probabilità di 0.01 e l'altra di 0.05. La produzione viene sottoposta ad un controllo di qualità. si sceglie a caso una delle due macchine e si controllano 150 pezzi prodotti.*

a) Calcolare la probabilità di osservare tre pezzi difettosi.

b) Calcolare probabilità che sia stata scelta la prima macchina dato che si sono osservati tre pezzi difettosi.

Denotiamo con A_1 l'evento è stata estratta la macchina 1 e con A_2 l'evento è stata estratta la macchina 2. Sia inoltre E l'evento *sono stati estratti tre ami difettosi su 150.*

a) Dal teorema delle probabilità totali

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) = &\mathbf{P}(E|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(E|A_2)\\ =&0.1258235 \cdot \frac{1}{2} + 0.03661575 \cdot \frac{1}{2} = 0.0812196.\end{aligned}$$

b) Dal teorema di Bayes

$$\mathbf{P}(A_1|E) = \frac{\mathbf{P}(E|A_1)\mathbf{P}(A_1}{\mathbf{P}(E)} = 0.774588.$$

Esercizio 3.22 (Es 2 del 2/7/02)**.** *Una compagnia di assicurazione ha suddiviso i suoi clienti in tre categorie in base alla propensione ad avere incidenti. Il 20% sono clienti ad alto rischio, il 30% a medio rischio e il restante 50% sono considerati a basso rischio. Un cliente ad alto rischio commette almeno un incidente in un anno con probabilità 0.25, un cliente a medio rischio lo commette con probabilità 0.12, e un cliente a basso rischio con probabilità 0.08.*

a) Trovare la probabilità che un cliente a caso commetta almeno un incidente in 1 anno.

b) Trovare la probabilità che un cliente sia ad alto rischio dato che ha commesso almeno un incidente in un anno.

c) Supponendo che la categoria di rischio non cambi da un anno all'altro e che gli incidenti in anni diversi siano indipendenti per i clienti ad alto rischio, calcolare la probabilità che un cliente sia ad alto rischio dato che ha commesso almeno un incidente all'anno in due anni consecutivi.

Denotiamo con A_i, $i = 1, 2, 3$ rispettivamente gli eventi corrispondenti a clienti ad alto, medio e basso rischio. Sia inoltre E l'evento *il cliente ha commesso almeno un incidente in un anno.* Dal testo abbiamo $\mathbf{P}(A_1) = 0.20$, $\mathbf{P}(A_2) = 0.30$, $\mathbf{P}(A_3) = 0.50$, $\mathbf{P}(E|A_1) = 0.25$, $\mathbf{P}(E|A_2) = 0.12$, $\mathbf{P}(E|A_3) = 0.08$.

a) Dal teorema delle probabilità totali

$$\mathbf{P}(E) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(E|A_i)\mathbf{P}(A_i) = 0.050 + 0.036 + 0.040 = 0.126.$$

b) Dal teorema di Bayes

$$\mathbf{P}(A_1|E) = \frac{\mathbf{P}(E|A_1)\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(E)} = \frac{0.05}{0.126} = 0.3968254.$$

c) Denotiamo con E_1 l'evento *il cliente ha commesso almeno un incidente in un anno*, e con E_2 l'evento *il cliente ha commesso almeno un incidente nell'anno seguente.* dobbiamo calcolare

$$\mathbf{P}(A_1|E_1 \cap E_2) = \frac{\mathbf{P}(E_1 \cap E_2|A_1)\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(E_1 \cap E_2)}.$$

Abbiamo, per l'ipotesi di indipendenza

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2|A_1) = \mathbf{P}(E_1|A_1)\mathbf{P}(E_2|A_1) = \mathbf{P}(E|A_1)^2 = 0.25^2 = 0.0625.$$

e

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E)^2 = 0.126^2 = 0.015876.$$

Di conseguenza

$$\mathbf{P}(A_1|E_1 \cap E_2) = \frac{0.0625 \cdot 0.20}{0.015876} = 0.787352.$$

Esercizio 3.23 (Es 2 del 10/9/93)**.** *I messaggi di "via" e "stop" trasmessi da un certo flusso di comunicazione si verificano nel rapporto di* 3 : 4*. A causa di interferenze di trasmissione un "via" diventa "stop" con probabilità 0.25, mentre uno "stop" diventa "via" con probabilità* $\frac{1}{3}$*.*

a) Se viene ricevuto un "via" qual è la probabilità che è stato trasmesso uno "stop"?

b) Se viene ricevuto uno "stop" qual è la probabilità che sia stato trasmesso un "via"?

c) Si determini la probabilità di discrepanza tra trasmissione e ricezione.

Indichiamo con A l'evento è stato trasmesso un "via". Allora l'evento è stato trasmesso uno "stop" è A^C. Poiché i segnali sono trasmessi con un rapporto di 3 : 4 abbiamo che $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{7}$ e $\mathbf{P}(A^C) = \frac{4}{7}$. Indichiamo con B l'evento è stato ricevuto un "via" e quindi con B^C l'evento è stato ricevuto uno "stop". Il testo ci informa che $\mathbf{P}(B^C|A) = \frac{1}{4}$ e $\mathbf{P}(B|A^C) = \frac{1}{3}$.
a) La probabilità richiesta secondo gli eventi che abbiamo introdotto è $\mathbf{P}(A^C|B)$ che possiamo calcolare sfruttando il teorema di Bayes. Calcoliamo prima $\mathbf{P}(A|B)$

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|A^C)\mathbf{P}(A^C)} = \frac{\frac{3}{4}\frac{3}{7}}{\frac{3}{4}\frac{3}{7} + \frac{1}{3}\frac{4}{7}} = \frac{27}{43} = 0.6279.$$

b) La probabilità richiesta secondo gli eventi che abbiamo introdotto è $\mathbf{P}(A|B^C)$ che possiamo calcolare come al punto precedente utilizzando il teorema di Bayes.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A|B^C) &= \frac{\mathbf{P}(B^C|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B^C|A^C)\mathbf{P}(A^C)+\mathbf{P}(B^C|A)\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}\frac{4}{7}+\frac{1}{4}\frac{3}{7}} = \frac{9}{41} \\ &= 0.2195.\end{aligned}$$

c) Vi è discrepanza quando il segnale inviato e il segnale ricevuto non sono lo stesso. Sempre nei termini degli eventi introdotti, dobbiamo calcolare la seguente probabilità

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left((A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)\right) &= \mathbf{P}(A\cap B^C)+\mathbf{P}(A^C\cap B) \\ &= \mathbf{P}(A|B^C)\mathbf{P}(B^C)+\mathbf{P}(A^C|B)\mathbf{P}(B) \\ &= \frac{1}{4}\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\frac{4}{7} = \frac{25}{84}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.24 (Es 1 del 22/1/96)**.** *In uno scaffale sono depositate N scatole di cui $\frac{N}{2}$ di tipo A e $\frac{N}{2}$ di tipo B; ognuna delle scatole di tipo A contiene n pezzi ($n > 2$) numerati da 1 a n dove, di fronte ad un'operazione di scelta casuale, il pezzo con il numero 1 ha probabilità 0.5 di essere estratto e gli altri $n-1$ sono fra loro equiprobabili; ognuna delle scatole di tipo B contiene n pezzi ($n > 2$) e, di fronte ad un'operazione di scelta casuale, ognuno degli n pezzi è equiprobabile. Viene prelevata casualmente una scatola (ognuna delle N scatole è equiprobabile di fronte ad un'operazione di scelta) e dalla scatola si estraggono casualmente e con riposizione due pezzi.*

a) Trovare la probabilità di ottenere i pezzi con il numero 2 e 3;

b) calcolare tale probabilità avendo posto $N = 120$ e $n = 10$;

c) posto infine $N = 240$ e $n = 10$ calcolare la probabilità di ottenere i pezzi con il numero 3 e 4;

d) sapendo di avere estratto i pezzi contrassegnati da 2 e 3, calcolare la probabilità che sia stata selezionata una scatola del tipo A e quindi calcolare tale probabilità avendo posto $N = 180$ e $n = 10$.

Indichiamo con A e B rispettivamente gli eventi *"ho estratto una scatola del tipo A"* e *"ho estratto una scatola del tipo B*. Abbiamo $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$. Indichiamo con P_i $i = 1, \dots, n$ rispettivamente gli eventi *"ad una estrazione è uscito il numero i*. Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $P_2 \cap P_3$. Possiamo evitare di distinguere sull'ordine di estrazione in quanto le estrazioni sono con riposizione.
a) Abbiamo

$$\mathbf{P}(P_1|A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(P_i|A) = \frac{1}{2(n-1)}, \quad i = 2, \dots, n$$

e

$$\mathbf{P}(P_i|B) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Applicando il teorema delle probabilità totali otteniamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(P_2 \cap P_3) &= \mathbf{P}(P_2 \cap P_3 \cap A) + \mathbf{P}(P_2 \cap P_3 \cap B) \\
&= P(A)P(P_2|A)P(P_3|P_2| \cap A) + P(B)P(P_2|B)P(P_3|P_2| \cap B) \qquad (3.3) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{5n^2 - 8n + 4}{8n^2(n-1)^2}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

b) Poiché la (3.4) non dipende da N la probabilità richiesta, sostituendo $n = 10$, è:

$$\mathbf{P}(P_2 \cap P_3) = \frac{5n^2 - 8n + 4}{8n^2(n-1)^2} = \frac{212}{3240} = 0.00654. \qquad (3.5)$$

c) Poiché la (3.4) non dipende da N la probabilità richiesta è uguale alla (3.5).
d) Per il teorema di Bayes si ha

$$\mathbf{P}(A|P_2 \cap P_3) = \frac{\mathbf{P}(P_2 \cap P_3|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(P_2 \cap P_3)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)^2}{\frac{5n^2-8n+4}{8n^2(n-1)^2}} = \frac{n^2}{5n^2 - 8n + 4}.$$

Sostituendo i valori dati si ottiene infine:

$$\mathbf{P}(A|P_2 \cap P_3) = \frac{100}{424} = 0.2358.$$

Esercizio 3.25 (Es 1 del 18/6/93)**.** *Vengono casualmente prelevati e utilizzati due pezzi di ricambio da un magazzino nel quale sono depositati 10 pezzi di cui 5 del fornitore A e 5 del fornitore B. Dovendo successivamente prelevare a caso altri due pezzi si decide di scegliere fra queste tre alternative:*

A1 *utilizzarli subito se la probabilità che la nuova coppia di pezzi sia formata da un pezzo del fornitore A e da un pezzo del fornitore B è maggiore di 0.6;*

A2 *sottoporli a collaudo se tale probabilità è non maggiore di* 0.6 *e non inferiore a* 0.3*;*

A3 *procedere ad un nuovo acquisto se la probabilità è inferiore a 0.3.*

Quale delle tre alternative deve essere adottata?

Indichiamo con A_k con $k = 0, 1, 2$ gli eventi *"sono stati prelevati k pezzi del fornitore A*. Sia inoltre B l'evento *"i successivi due pezzi prelevati sono uno del fornitore A e uno del fornitore B*. Per il teorema delle probabilità totali

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=0}^{2} \mathbf{P}(A_k \cap B) = \sum_{k=0}^{2} \mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(B|A_k). \tag{3.6}$$

Calcoliamo dunque le probabilità che entrano in gioco.

$$\mathbf{P}(A_0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9};\ \mathbf{P}(A_1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9};\ \mathbf{P}(A_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9}.$$

$$\mathbf{P}(B|A_0) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28};\ \mathbf{P}(B|A_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{4}{7};$$

$$\mathbf{P}(B|A_2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}.$$

Siamo quindi in grado di calcolare la probabilità richiesta che risulta dalla (3.6)

$$\mathbf{P}(B) = \frac{2}{9}\frac{15}{28} + \frac{5}{9}\frac{4}{7} + \frac{2}{9}\frac{15}{28} = \frac{5}{9} = 0.5556.$$

Si adotta quindi l'alternativa $A2$.

Esercizio 3.26 (Es 1 del 17/6/94)**.** *Un magazzino contiene m pezzi di ricambio di cui b sono difettosi. Degli m pezzi ne sono inizialmente prelevati, per essere utilizzati, n $(n < m)$. Si determini la probabilità che il pezzo prelevato successivamente sia difettoso.*

Indichiamo per $k = 0, 1 \ldots, n$ gli eventi:

$$A_k = \{k \text{ pezzi difettosi su } n\}.$$

Gli insiemi A_k costituiscono una partizione dello spazio degli eventi e

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{m-b}{n-k}}{\binom{m}{n}}.$$

Indicando l'evento di cui è richiesta la probabilità con

$$B = \{n + 1\text{-esimo pezzo difettoso }\}$$

sappiamo che $\mathbf{P}(B|A_k) = \frac{b-k}{m-n}$. Infatti se si è verificato l'evento A_k sono rimaste nel magazzino $m - n$ pezzi di cui $b - k$ difettosi. Per il teorema delle probabilità totali possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{b}{k}\binom{m-b}{n-k}}{\binom{m}{n}} \frac{b-k}{m-n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{b-1}{k}\binom{m-b}{n-k}}{\binom{m-1}{n}} \frac{b}{m} = \frac{b}{m}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.27 (Es 1 del 9/9/96)**.** *Si devono spedire dei pezzi di cui una parte (tipo A) molto pesanti e con peso tra loro uguale e una parte (tipo B) più leggeri e con peso fra loro molto variabile. Per ottimizzare il carico sui mezzi di trasporto (n mezzi) si è deciso di caricare N_A pezzi pesanti in numero uguale ($\frac{N_A}{n}$) su ogni mezzo e N_B pezzi più leggeri secondo la regola: il pezzo più pesante (degli N_B) su un mezzo, due pezzi più leggeri sul secondo mezzo, tre pezzi ancora più leggeri sul terzo mezzo e così via. Più precisamente il mezzo $i-$esimo avrà caricato $\frac{N_A}{n}$ pezzi di tipo A e i pezzi di tipo B. Contestualmente alla partenza dei mezzi col carico è stato inviato al cliente un fax con la distinta di identificazione dei pezzi in spedizione sui camion. Al ricevimento del fax il tecnico del collaudo di accettazione del cliente individua casualmente un camion (ogni camion è equiprobabile di fronte all'operazione di scelta) e dalla distinta di carico del camion stesso sceglie casualmente due pezzi (ogni pezzo risulta equiprobabile di fronte all'operazione di scelta) per il collaudo di accettazione da effettuare al momento di arrivo dei mezzi. Se i pezzi di tipo A spediti sono 40 e i camion utilizzati 10, trovare la probabilità che i pezzi da collaudare all'arrivo della merce siano uno del tipo A e uno del tipo B.*

Indichiamo con A l'evento di interesse *i pezzi scelti per il collaudo sono uno del tipo A e uno del tipo B*. Introduciamo anche gli eventi

$$D_i = \text{“è stato scelto il mezzo } i''$$

che costituiscono una partizione dello spazio di tutti gli eventi possibili e sono tali che $\mathbf{P}(D_i) = \frac{1}{n}$. Se è stato scelto il mezzo i-esimo questo contiene 4 pezzi del tipo A e i pezzi del tipo B. La probabilità di estrarre 1 pezzo del tipo A e un pezzo del tipo B è calcolata come casi favorevoli su casi possibili. I casi possibili sono tutte le coppie che posso formare con i $4 + i$ pezzi contenuti nel mezzo i–esimo, cioè $\binom{4+i}{2}$, i casi favorevoli sono le coppie in cui un elemento è scelto tra i 4 del tipo A e un elemento tra gli i del tipo B, cioè $\binom{4}{1}\binom{i}{1}$. Quindi

$$\mathbf{P}(A|D_i) = \frac{\binom{4}{1}\binom{i}{1}}{\binom{4+i}{2}}.$$

Per il teorema delle probabilità totali abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \sum_{i=1}^{10} \mathbf{P}(A|D_i)\mathbf{P}(D_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{\binom{4}{1}\binom{i}{1}}{\binom{4+i}{2}} \frac{1}{10} = \frac{4}{10} \sum_{i=1}^{10} \frac{2i}{(4+i)(3+i)} \\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{20}+\frac{2}{30}+\frac{3}{42}+\frac{4}{56}+\frac{5}{72}+\frac{6}{90}+\frac{7}{110}+\frac{8}{132}+\frac{9}{156}+\frac{10}{182}\right) \\ &= 0.5060\end{aligned}$$

Esercizio 3.28 (Es 2 del 9/9/96)**.** *Si riprenda l'Esercizio 3.34. Supponiamo che con la procedura di collaudo siano stati individuati un pezzo di tipo A e un pezzo di tipo B: trovare la probabilità p_i che sia stato scelto il mezzo i-esimo, cioè che sia stato scelto il mezzo con i pezzi del tipo B, e calcolare p_i per $i = 3$ e per $i = 4$.*

Riprendiamo l'Esercizio 3.34. Dobbiamo calcolare $\mathbf{P}(D_i|A)$. Per il teorema di Bayes sappiamo che

$$\mathbf{P}(D_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|D_i)\mathbf{P}(D_i)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{\binom{4}{1}\binom{i}{1}}{\binom{4+i}{2}}\frac{1}{10}}{0.5060} = \frac{8i}{(4+i)(3+i)\cdot 5.060}.$$

in quanto sappiamo dall'esercizio 3.34 che $\mathbf{P}(A) = 0.5060$, $\mathbf{P}(D_i) = \frac{1}{10}$ e $\mathbf{P}(A|D_i) = \frac{8i}{(4+i)(3+i)}$. Ora per $i = 3$ abbiamo $\mathbf{P}(A|D_3) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$ e per $i = 4$, $\mathbf{P}(A|D_4) = \frac{32}{56} = \frac{4}{7}$. Quindi

$$p_3 = p_4 = \frac{4}{7 \cdot 5.060} = 0.1129.$$

Esercizio 3.29 (Es 1 del 20/5/96)**.** *Una linea di produzione fabbrica pezzi ciascuno dei quali ha probabilità p di essere effettivamente difettoso. Ogni pezzo viene sottoposto ad un collaudo automatico con una macchina che dichiara difettoso il pezzo ispezionato con probabilità p_1 (quando il pezzo sia effettivamente difettoso) e con probabilità p_2 (quando il pezzo sia in realtà buono).*

a) Calcolare la probabilità che un pezzo scelto a caso è dichiarato difettoso;

b) *calcolare la probabilità che un pezzo dichiarato difettoso lo sia effettivamente.*

Indichiamo con D $\bar{D}$ ed F rispettivamente gli eventi: *il pezzo scelto a caso è effettivamente difettoso*, *il pezzo scelto a caso non è effettivamente difettoso* e *il pezzo scelto a caso è dichiarato difettoso.*
a) Viene richiesta la probabilità che il pezzo sia dichiarato difettoso, cioè $\mathbf{P}(F)$. Dalla formula delle probabilità totali si ha

$$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(F|D)\mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(F|\bar{D})\mathbf{P}(\bar{D}) = p_1 p + p_2(1-p).$$

b) Dalla formula di Bayes si ha

$$\mathbf{P}(D|F) = \frac{\mathbf{P}(E|D)\mathbf{P}(D)}{\mathbf{P}(F|D)\mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(F|\bar{D})\mathbf{P}(\bar{D})} = \frac{p_1 p}{p_1 p + p_2(1-p)}.$$

Esercizio 3.30 (Es 3 del 17/5/99)**.** *Un gioco si svolge in due fasi. La prima fase consiste nell'ottenere un numero tra uno e sette con l'aiuto di un dado regolare come segue. Si tira il dado e se escono i numeri: 2, 3, 4, 5, 6, si tiene il numero che è uscito, altrimenti si tira di nuovo il dado e se escono 1, 2, 3, si tiene il numero 1 altrimenti si prende il numero 7. Nella seconda fase, dopo aver ottenuto il numero i, ($i = 1, \dots, 7$) si prende il dado D_i, che possiede $i-1$ facce bianche e $7-i$ facce rosse, e lo si lancia.*

a) *Calcolare la probabilità che al primo lancio compaia una faccia rossa;*

b) *Sapendo che è uscita una faccia rossa al primo lancio, calcolare la probabilità che si sia tirato il dado D_1;*

c) *Sapendo che è uscita una faccia rossa nel primo lancio, calcolare la probabilità che esca una faccia rossa al secondo lancio.*

Indichiamo con R_1 l'evento *si presenta faccia rossa al primo lancio.* Indichiamo con D_i gli eventi corrispondenti alla scelta (dopo la prima fase) del

dado $i-$esimo, caratterizzato dall'avere $7-i$ facce rosse. Si ha $P(D_i) = \frac{1}{6}$ per $i = 2, 3, \ldots, 6$, poiché la scelta di tale dado avviene sole se si presentano rispettivamente i punteggi dal 2 al 6 sul primo dado e ciascuno di questi si presenta con probabilità $\frac{1}{6}$. Il dado D_1 invece viene scelto solo se si presenta 1 al primo lancio e o 1, o 2, o 3 al secondo lancio. Per cui $\mathbf{P}(D_1) = \frac{1}{12}$. Analogamente $\mathbf{P}(D_7) = \frac{1}{12}$.
a) Per il teorema delle probabilità totali

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(R_1) &= \sum_{i=1}^{7} \mathbf{P}(R_1|D_i)\mathbf{P}(D_i) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{12} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 0\frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{15}{2}\right) + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} = 0.5.
\end{aligned}$$

b) Dal teorema di Bayes

$$\mathbf{P}(D_1|R_1) = \frac{\mathbf{P}(R_1|D_1)\mathbf{P}(D_1)}{\sum_{i=1}^{7} \mathbf{P}(R_1|D_i)\mathbf{P}(D_i)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

c) Sia R_2 l'evento *si presenta faccia rossa al secondo lancio.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(R_2|R_1) &= \frac{\mathbf{P}(R_2 \cap R_1)}{\mathbf{P}(R_1)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{7} \mathbf{P}(R_1 \cap R_2|D_i)\mathbf{P}(D_i)}{\sum_{i=1}^{7} \mathbf{P}(R_1|D_i)\mathbf{P}(D_i)} \\
&= \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{12} + \frac{55}{6^3}}{\frac{1}{2}} = \frac{146}{216} = 0.6759.
\end{aligned}$$

3.3 Variabili Aleatorie

Esercizio 3.31 (Es 1 del 16/2/98)**.** *Una fabbrica è composta da* 12 *linee produttive di cui* 8 *sono state revisionate e funzionano regolarmente,* *mentre 4 non sono in conformità. La società deve ricevere la visita di Audit e non ha il tempo di revisionare anche le 4 linee fuori controllo, e decide di assumere il rischio dell'Audit. L'indomani arrivano in azienda gli ispettori e, come previsto dalle specifiche, scelgono a caso 2 linee e su di esse effettuano l'Audit. Al termine dei controlli se nessuna linea ispezionata risulta fuori controllo, all'azienda viene confermato il visto di conformità; se almeno una viene trovata non conforme l'ispettore non concede il visto di conformità e l'azienda è costretta a fermare l'intera produzione per le revisioni necessarie: in questo secondo caso l'azienda subisce un danno economico di 60 milioni di Lire. Calcolare il valore atteso del danno economico per l'azienda.*

Se indichiamo con X la v.c. *"numero di linee guaste tra le due scelte*, per quanto descritto nel testo si tratta di una v.c. ipergeometrica $IG(12, 4, 2)$. L'azienda subisce un danno solo se $X \geq 1$ quindi la v.c "Danno può essere descritta dalla variabili $D = 60 \cdot I_{X \geq 1}$ e quindi e il danno medio $\mathbf{E}(D)$ per l'azienda sarà dato da $\mathbf{E}(D) = 60 \cdot P(X \geq 1)$. Si ha

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= P(X = 1) + P(X = 0) \\ &= \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{8}{0}\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} \\ &= \frac{19}{33} = 0.58. \end{aligned}$$

Il costo medio per l'azienda risulta (in milioni di lire) $\mathbf{E}(D) = 0.58 \cdot 60 = 34.8$.

Esercizio 3.32 (Es 1 del 20/5/98)**.** *Uno spedizioniere senza scrupoli spera di evitare l'arresto da parte della Finanza mescolando in una cassa biglie di materiale radioattivo a biglie di acciaio normale. Soltanto il 5% delle biglie sono illegali su un totale di 400. La Finanza controlla 5 biglie estratte della cassa. Trovare la probabilità che lo spedizioniere venga arrestato.*

Lo spedizioniere non viene arrestato se non viene estratta nessuna biglia di materiale radioattivo. La v.c. che descrive il numero di biglie estratte dal finanziere è una ipergeometrica con $M = 400$ $K = 400 \cdot 0.05 = 20$ e $m = 5$. La probabilità richiesta è data da

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) &= 1 - \frac{\binom{380}{5}\binom{20}{0}}{\binom{400}{5}} \\ &= 1 - \frac{380 \cdot 379 \cdot 378 \cdot 377 \cdot 376}{400 \cdot 399 \cdot 398 \cdot 397 \cdot 396} \\ &= 1 - 0.77 = 0.23.\end{aligned}$$

Esercizio 3.33 (Es 1 del 9/9/94)**.** *Una ditta per la consegna della merce ai propri clienti dispone di un parco di* 12 *automezzi di cui* 7 *di proprietà e* 5 *di proprietà dei rispettivi autisti terzi. Due automezzi hanno improvvisamente subito (in condizioni di equiprobabilità) un'avaria e dal parco mezzi così ridotto si caricano, con una merce destinata all'Estero, i primi tre automezzi arrivati in ditta di ritorno da un precedente servizio di trasporto (l'ordine d'arrivo è equiprobabile fra i mezzi del parco ridotto).*
a) Definire la variabile casuale X che descrive il numero dei mezzi di proprietà della ditta caricati per l'Estero.
b) Trovare il valore atteso e la varianza di X.

a) La variabile X assume i valori 0, 1 , 2, 3. Per determinare la legge di X, vale a dire la probabilità con cui assume i suddetti valori occorre tener presente quanti automezzi della ditta hanno subito un'avaria. Introduciamo quindi la variabile aleatoria Y che descrive quanti automezzi della ditta hanno subito un'avaria. Si tratta di una variabile aleatoria ipergeometrica di parametri $M = 12$, $K = 7$ e $m = 2$. Risulta quindi

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \frac{\binom{7}{0}\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{5}{33}; \quad \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{35}{66};$$

$$\mathbf{P}(Y = 2) = \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{0}}{\binom{12}{2}} = \frac{7}{22}.$$

Se $Y = k$, $k = 0, 1, 2$ allora la legge di probabilità della variabile X si ricava dal teorema delle probabilità totali.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = x) = &\mathbf{P}(X = x|Y = 0)\mathbf{P}(Y = 0) + \mathbf{P}(X = x|Y = 1)\mathbf{P}(Y = 1)\\ &+ \mathbf{P}(X = x|Y = 2)\mathbf{P}(Y = 2)\end{aligned} \tag{3.7}$$

per $x = 0, 1, 2, 3$. Le probabilità condizionate sono anch'esse deducibili da un modello ipergeometrico, in quanto se $Y = k$ allora

$$\mathbf{P}(X = x|Y = k) = \frac{\binom{7-k}{x}\binom{(12-2)-(7-k)}{3-x}}{\binom{12-2}{3}}.$$

Calcoliamo quindi tutte le probabilità richieste. Per $x = 0$:

$$\mathbf{P}(X = 0|Y = 0) = \frac{\binom{7}{0}\binom{10-7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120};$$

$$\mathbf{P}(X = 0|Y = 1) = \frac{\binom{6}{0}\binom{10-6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30};$$

$$\mathbf{P}(X = x|Y = 2) = \frac{\binom{5}{0}\binom{10-5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}.$$

Per $x = 1$:

$$\mathbf{P}(X = 1|Y = 0) = \frac{\binom{7}{1}\binom{10-7}{3-1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{40};$$

$$\mathbf{P}(X = 1|Y = 1) = \frac{\binom{6}{1}\binom{10-6}{3-1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10};$$

$$\mathbf{P}(X = 1|Y = 2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10-5}{3-1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}.$$

Per $x = 2$:

$$\mathbf{P}(X = 2|Y = 0) = \frac{\binom{7}{2}\binom{10-7}{3-2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40};$$

$$\mathbf{P}(X=2|Y=1)=\frac{\binom{7-1}{2}\binom{10-6}{3-2}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{2};$$

$$\mathbf{P}(X=2|Y=2)=\frac{\binom{7-2}{2}\binom{10-5)}{3-2}}{\binom{10}{3}}=\frac{5}{12}$$

Infine, per $x=3$:

$$\mathbf{P}(X=3|Y=0)=\frac{\binom{7}{3}\binom{10-7}{3-3}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{24};$$

$$\mathbf{P}(X=3|Y=1)=\frac{\binom{7-1}{3}\binom{10-6}{3-3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{6};$$

$$\mathbf{P}(X=3|Y=2)=\frac{\binom{7-2}{3}\binom{10-5}{3-3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{12}.$$

Finalmente abbiamo tutti i numeri (!) per calcolare la legge di probabilità della variabile X. Dalla (3.7) ricaviamo

$$\mathbf{P}(X=0)=\frac{1}{120}\frac{5}{33}+\frac{1}{30}\frac{35}{66}+\frac{1}{12}\frac{7}{22}=\frac{1}{22}.$$

$$\mathbf{P}(X=1)=\frac{7}{40}\frac{5}{33}+\frac{3}{10}\frac{35}{66}+\frac{5}{12}\frac{7}{22}=\frac{7}{22}.$$

$$\mathbf{P}(X=2)=\frac{21}{40}\frac{5}{33}+\frac{1}{2}\frac{35}{66}+\frac{5}{12}\frac{7}{22}=\frac{21}{44}.$$

$$\mathbf{P}(X=3)=\frac{7}{24}\frac{5}{33}+\frac{1}{6}\frac{35}{66}+\frac{1}{12}\frac{7}{22}=\frac{7}{44}.$$

Per soddisfazione personale verifichiamo che la somma delle probabilità è 1.

$$\sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}(X=k)=\frac{1}{22}+\frac{7}{22}+\frac{21}{44}+\frac{7}{44}=1.$$

b) Calcoliamo media e varianza di X. $\mathbf{E}(X)=\frac{7}{4}$. $\mathbf{E}(X^2)=\frac{161}{44}$ da cui $\mathrm{Var}(X)=\frac{105}{176}$.

Esercizio 3.34 (Es 3 del 8/7/96). *La manutenzione di pronto intervento di un impianto è garantita da due squadre di specialisti: la squadra A per guasti di tipo meccanico, idraulico, oleodinamico e simili, la squadra B per guasti di tipo elettrico elettronico, elettromeccanico e simili. I due tipi di guasto sono eventi indipendenti e l'assegnazione delle avarie dei macchinari è stata fatta in modo tale da bilanciare egualmente il numero di interventi fra le squadre A e B, sicché la probabilità che intervenga la squadra A è la stessa che intervenga la squadra B ed è pari a* 0.5. *Sia X il numero di guasti che si devono verificare all'impianto affinché si verifichi per la prima volta il guasto che richiede l'intervento della squadra B. Calcolare il valore atteso e la varianza di X.*

La v.c. X assume valori $k = 1, 2, \ldots$ e si tratta di una v.c. Geometrica di parametro $p = 0.5$, in quanto il successo è rappresentato dall'intervento della squadra B la cui probabilità di intervento è 0.5. Quindi

$$\mathbf{P}(X = k) = 0.5(1 - 0.5)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Il valore atteso della v.c. X è

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+1}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^{h+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 2,\end{aligned}$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo posto $h = k - 1$. La varianza di una v.c. Geometrica di parametro p è pari a $\frac{1-p}{p^2}$. Con conti analoghi si dimostra quindi che $\mathrm{Var}(X) = 2$.

Esercizio 3.35 (Es 1 del 1/4/96). *A valle di una linea di produzione è installato un impianto di collaudo formato da due stazioni di controllo in linea; la prima stazione A per il controllo dimensionale, la seconda B per il controllo della difettosità superficiale. Un pezzo lavorato alla linea di produzione passa in sequenza prima alla stazione A e poi alla stazione B.*

*Al riscontro di un difetto sul pezzo si è costretti a fermare l'intera linea di produzione per verifiche immediate. È noto che la fabbrica produce l'*1% *di pezzi con difettosità dimensionale, il* 2% *con difettosità superficiale e i due tipi di difetti son indipendenti. Calcolare il numero atteso di pezzi inviati alla spedizione prima di dover fermare la linea di produzione.*

Indichiamo con A e B rispettivamente gli eventi *il pezzo presenta difettosità dimensionale* e *il pezzo presenta difettosità superficiale*. Si sa dal testo che $\mathbf{P}(A) = 0.01$ e $\mathbf{P}(b) = 0.02$. Inoltre per l'indipendenza di due tipi di difetto $\mathbf{P}(A \cap B) = 0.0002$. La probabilità p che un pezzo non sia inviato alla spedizione è data da

$$p = \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0.01 + 0.02 - 0.0002 = 0.0298.$$

Indichiamo con X la variabile casuale che conta il numero di pezzi che passano la linea di controllo prima che uno di essi venga fermato. Si tratta di una variabile Geometrica con parametro p, avente distribuzione

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Sappiamo che

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1-p}{p}$$

e quindi $\mathbf{E}(X) = 32.5570 \approx 33$ pezzi.

Esercizio 3.36 (Es 1 del 26/5/97)**.** *A valle di una linea di produzione è installato un impianto di collaudo formato da due stazioni di controllo in linea; la prima stazione (A) per il controllo della difettosità dimensionale, la seconda (B) per il controllo della difettosità superficiale. Un pezzo lavorato alla linea di produzione passa in sequenza prima alla stazione A e poi alla stazione B. Al riscontro di un qualsiasi difetto sul pezzo si è costretti a fermare l'intera linea di produttiva per verifiche immediate. È noto che la fabbrica produce pezzi con lo* 0.5% *di difettosità dimensionale e l'*1.5% *con difettosità superficiale e che i due tipi di difetto sono eventi indipendenti.*

a) Sia X la variabile casuale: “numero dei pezzi inviati in spedizione prima di dover fermare l’impianto per verifica a causa della presenza di uno scarto. *Calcolare la probabilità p che X sia superiore a* 10 *pezzi.*

b) Calcolare il numero atteso $\mathbf{E}(X)$ di pezzi inviati alla spedizione prima dell’arresto.

c) Si è trovato che p è troppo bassa per le aspettative dell’azienda. È stato quindi deciso di agire sull’impianto di produzione per ridurre la difettosità dei prodotti. Non potendosi tecnicamente migliorare la qualità dimensionale, si chiede di trovare la percentuale di pezzi difettosi per anomalie superficiali con cui dovrebbe produrre la fabbrica affinché p sia almeno 0.9 *restando ferma allo* 0.5 *la percentuale dei prodotti con difettosità dimensionale.*

Indichiamo con A_i l’evento *difetti di tipo dimensionale nell’i-esimo pezzo in produzione* e con B_i l’evento *difetti di tipo superficiale nell’i-esimo pezzo in produzione.* Abbiamo $P(A_i) = 0.005$ e $P(B_i) = 0.015$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$. Cerchiamo quindi di capire chi è la v.c. X e di come la sua legge possa essere espressa in funzione della probabilità di questi eventi. Innanzitutto essa può assumere solo i valori interi $k = 1, 2, \ldots$. Si avrà $X = 0$ se il primo pezzo viene fermato, e ciò avviene se, e solo se, si verifica l’evento $A_1 \cup A_2$. Abbiamo quindi

$$P(X = 0) = P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1)P(B_1).$$

Ci conviene dare un nome a $P(A_i \cup B_i) = P(A_i) + P(B_i) - P(A_i)P(B_i)$. Essendo indipendente da i la denotiamo con p. Il suo valore ora non ci interessa ma possiamo calcolarlo: $p = 0.02$. Poiché è ragionevole supporre che il verificarsi di difetti sui vari pezzi siano eventi indipendenti, avremo che $X = 1$ se, e solo se, il primo pezzo è senza difetti e il secondo presenta uno dei due difetti. Cioè se si verifica l’evento $(A_1 \cup B_1)^C \cup (A_2 \cap B_2)$ e quindi possiamo dire che $P(X = 1) = p(1 - p)$. È quindi chiare che

$$P(X = k) = p(1 - p)^k \qquad k = 0, 1, \ldots$$

cioè si tratta di una v.c. Geometrica di parametro p.
a) La probabilità richiesta può essere calcolata come segue

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} p(1-p)^k \\ &= 1 - p\frac{(1-(1-p)^{11})}{1-(1-p)} = (1-p)^{11} \\ &= 0.80. \end{aligned}$$

b) $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(1-p)^k = \frac{1-p}{p} = 49.$
c) Devo trovare $P(B_i) = p_B$ tale che $(1-p)^{11} > 0.9$ dove

$$p = P(A_i \cup B_i) = P(A_i) + P(B_i) - P(A_i)P(B_i) = P_A + P_B - P_A P_B.$$

Quindi $p = 0.005 + 0.995p$, da cui si ottiene $p < 0.0095$. Allora $p_B < 0.0045$. Ci dovrebbero quindi essere non più dello 0.45% di difetti del secondo tipo.

Esercizio 3.37 (Es 2 del 10/6/96). *Supponiamo che siano date due variabili casuali indipendenti X e Y con la stessa distribuzione Geometrica con parametro $p = 0.4$, vale a dire $X, Y \sim Geom(0.4)$. Si calcoli:*

a) la probabilità che la variabile X assuma lo stesso valore della variabile Y, vale a dire $\mathbf{P}(X = Y)$;

b) la probabilità che la variabile X assuma valori maggiori o uguali del doppio dei valori assunti dalla variabile Y, vale a dire, $X \geq 2Y$.

a) Dobbiamo calcolare $\mathbf{P}(X = Y)$. Sappiamo che

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Essendo le variabili X e Y indipendenti possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k, Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{k-1}\\ &= p^2\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2(k-1} = p^2\sum_{h=0}^{+\infty}(1-p)^{2h}\\ &= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.\end{aligned}$$

Poiché $p = 0.4$ ricaviamo $\mathbf{P}(X = Y) = 0.25$.
b) Procedendo come per il punto precedente, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X\geq 2Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(Y=k, X\geq 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(Y=k)\mathbf{P}(X\geq 2k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(Y=k)\sum_{h=2k}^{+\infty}\mathbf{P}(X=h\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1}\sum_{h=2k}^{+\infty}p(1-p)^{h-1}\\ &= p^2\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}\sum_{t=0}^{+\infty}(1-p)^{t+2k-1}\\ &= p^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^{k-1+2k-1}}{1-(1-p)}\\ &= p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{3k-2} = p\sum_{h=0}^{+\infty}(1-p)^{3h+1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^3}\\ &= \frac{q}{1+q+q^2},\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $q = 1 - p$. Sostituendo $q = 0.6$ otteniamo $\mathbf{P}(X \geq 2Y) = 0.3061$.

Esercizio 3.38 (Es 3 del 19/9/02)**.** *Un operatore telefonico riceve in media 5 chiamate ogni due minuti.*

a) Calcolare la probaiblità che in un minuto non arrivino chiamate.

b) Calcolare la probabilità che in tre minuti non arrivino chiamate.

c) Calcolare la probabilità che in un minuto arrivino almeno due chiamate.

Denotiamo con $X(t)$ il numero di chiamate che l'operatore riceve nell'intervallo di tempo $(0, t]$. Si tratta di una variabile casuale di Poisson il cui parametro $\lambda = \frac{5}{2}$. La distribuzione è data da

$$\mathbf{P}(X(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) In questo caso $t = 1$ e abbiamo

$$\mathbf{P}(X(1) = 0) = e^{-\frac{5}{2}} = 0.0821.$$

b) In questo caso $t = 3$ e abbiamo

$$\mathbf{P}(X(3) = 0) = e^{-\frac{15}{2}} = 0.0006.$$

c) In questo caso $t = 1$ e dobbiamo calcolare

$$\mathbf{P}(X(1) \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X(1) < 2) = 1 - \left(e^{-\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}}\right) = 0.713.$$

Esercizio 3.39 (Es 3 del 11/11/02)**.** *Gli incidenti mortali sul tratto di autostrada Milano–Bergamo si verificano in media con una frequenza di un incidente ogni 20 giorni e si può supporre che il numero di incidenti in un giorno sia distribuito come una variabile casuale di Poisson.*

a) Calcolare la probabilità che in 10 giorni non si verifichi nessun incidente mortale.

b) *Calcolare la probabilità che in 30 giorni si verifichi almeno un incidente*

c) *Calcolare la probabilità che in 40 giorni si verifichino meno di 2 incidenti.*

Il numero di incidenti che si verificano nell'intervallo di tempo $(0, t]$, dove t è espresso in giorni, è una variabile casuale di Poisson, che indichiamo con $X(t)$ la cui densità di probabilità è data da

$$\mathbf{P}(X(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Possiamo quindi calcolare le probabilità richieste ponendo $\lambda = \frac{1}{20}$ e sostituendo l'opportuno valore di t.

a) Per $t = 10$ abbiamo $\mathbf{P}(X(10) = 0) = e^{-\frac{1}{2}} = 0.61$.

b) Per $t = 30$ abbiamo $\mathbf{P}(X(30) \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(X(30) = 0) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} = 0.78$.

c) Per $t = 40$ abbiamo $\mathbf{P}(X(40) < 2) = \mathbf{P}(X(40) = 0) + \mathbf{P}(X(40) = 1) = e^{-2} + 2e^{-2} = 0.41$.

Esercizio 3.40 (Es 1 del 4/9/02)**.** *Il responsabile del controllo di qualità di una ditta ha verificato che lo* 0.06% *degli oggetti prodotti con un certo processo di fabbricazione sono difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 1000 oggetti scelti a caso*

a) *non vi siano difettosi;*

b) *vi sia almeno un difettoso;*

c) *vi siano al più due difettosi.*

La probabilità di estrarre un pezzo difettoso è pari a 0.0006 e può quindi essere considerato un evento raro a cui si può applicare la distribuzione di Poisson di parametro, per il caso in esame, $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0.0006 = 0.6$.

a) La probabilità che non vi siano difettosi è la seguente

$$P(X=0)=\frac{e^{-0.6}\cdot 0.6^x}{x!}=e^{-0.6}=0.5489.$$

b) La probabilità che non vi sia almeno un difettoso è immediatamente determinata dalla precedente

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-0.6}=0.4511.$$

b) Infine, la probabilità che vi siano almeno due difettosi è data da

$$\begin{aligned}P(X\leq 2)&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=0.5489+0.3293+0.0988=0.977.\end{aligned}$$

Esercizio 3.41 (Es 2 del 12/9/95). *In un grande bacino idrico sono disperse delle particelle inquinanti, di piccole dimensioni e non interagenti, di due tipi distinti: il numero medio di particelle di tipo A per cm^3 di acqua è $m_A=2.2$; il numero medio di particelle di tipo B per cm^3 di acqua è $m_B=1.8$. Supponiamo, inoltre, che il numero di particelle disperse in acqua segua la legge di Poisson e che il numero di particelle di tipo A sia indipendente dal numero di particelle del tipo B. Determinare:*

a) la probabilità di trovare una sola particella in un cm^3 di acqua;

b) la probabilità di trovare almeno 370 particelle in 100 cm^3 di acqua;

c) la probabilità che il numero di particelle di tipo B superi il numero di particelle di tipo A in 100 cm^3 di acqua.

a) Indichiamo con A_x il numero di particelle di tipo A in x cm^3 di acqua e con B_x l'analoga variabile ma per le particelle di tipo B. Dal testo sappiamo che per $x=1$ si tratta di variabili casuali di Poisson rispettivamente di parametro 2.2 e 1.8. In generale abbiamo che

$$\mathbf{P}(A_x=k)=\frac{(2.2x)^k e^{-2.2x}}{k!},\quad k=1,2,\ldots$$

e analogamente per la variabile B_x. Indichiamo inoltre con S_x la variabile che conta il numero di particelle in x cm^3 di acqua. Per l'indipendenza di A_x e B_x si tratta di una variabile casuale di Poisson con parametro $(2.2 + 1.8)x$. Quindi

$$\mathbf{P}(S_1 = 1) = 4e^{-4}$$

b) La variabile S_{100} può essere vista come somma di 100 variabile casuali di Poisson aventi parametro 4. Allora $\mathbf{E}(S_{100}) = 400$ e $\mathrm{Var}(S_{100}) = 400$. Possiamo applicare il teorema del Limite Centrale e otteniamo, indicando con Z la variabile casuale Normale standardizzata

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(S_{100} \geq 370\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{S_{100} - \mathbf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_{100})}} \geq \frac{370 - 400}{20}\right) = \mathbf{P}(Z \geq -1.5) \\ &= 0.9332.\end{aligned}$$

c) Si deve calcolare $\mathbf{P}(B_{100} > A_{100})$. Ciascuna della variabili considerate può essere approssimata con una variabile casuale Normale per il teorema del Limite Centrale. Quindi anche la differenza $B_{100} - A_{100}$. Abbiamo che $\mathbf{E}\left(B_{100} - A_{100}\right) = 180 - 220 = -40$ $\mathrm{Var}\left(B_{100} - A_{100}\right) = 180 + 200 = 400$ e quindi

$$\mathbf{P}\left(B_{100} - A_{100} > 0\right) = \mathbf{P}\left(Z > \frac{40}{20}\right) = \mathbf{P}(Z > 2) = 0.0228.$$

Esercizio 3.42 (Es 3 del 10/9/93)**.** *Un sistema di 5 componenti dopo 100 ore di funzionamento non si arresta se 3 o più dei componenti sono ancora funzionanti. Un singolo componente si rompe se riceve almeno due shock durante le 100 ore. Il numero di shock subiti da ogni componente è una variabile aleatoria di Poisson con parametro $\lambda = 1$. Si calcoli la probabilità π_s che dopo 100 ore il sistema non si guasti.*

Sia X la v.a. che conta il numero di shock subiti da un singolo componente nelle 100 ore. Il componente non si rompe se $X \leq 1$. La probabilità che il singolo componente non si rompa è

$$\mathbf{P}(X \leq 1) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}.$$

Sia R la v.a. che conta quanti componenti su 5 non sono rotti. R è una v.a. Binomiale di parametri $n = 5$ e $p = \frac{2}{e}$. Il sistema non si arresta se $R \geq 3$. La probabilità richiesta è :

$$\pi_s = \mathbf{P}(R \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} \left(\frac{2}{e}\right)^k \left(1 - \frac{2}{e}\right)^{5-k} = 0.2781 + 0.3872 + 0.2156$$
$$= 0.8809.$$

Esercizio 3.43 (Es 1 del 12/1/98)**.** *Un impianto industriale fabbrica pezzi in serie ognuno dei quali ha probabilità p di essere difettoso. Durante la produzione vengono prelevati casualmente n pezzi da inviare al collaudo. Se al collaudo un pezzo risulta difettoso la perdita per l'azienda è di* 2 *milioni di lire. Il costo per le operazioni di collaudo è di* 0.5 *milioni di lire al pezzo.*

a) Determinare la legge di probabilità della variabile casuale X che descrive il numero dei pezzi difettosi.

b) Trovare il valore atteso del costo globale per il collaudo degli n pezzi prelevati.

c) Calcolare il valore atteso richiesto al punto b) quando $p = 0.08$ e $n = 20$.

a) La variabile casuale X è una Binomiale $B(n, p)$ e la sua legge è

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

b) La variabile C costo per l'azienda è definita come

$$C = 0.5n + 2X.$$

Abbiamo quindi

$$E(C) = 0.5n + 2E(X) = n(0.5 + 2p).$$

c) Nel caso richiesto $E(C) = 20(0.5 + 0.16) = 13.2$.

Esercizio 3.44 (Es 2 del 21/1/94)**.** *La probabilità che una seggiovia si arresti durante una risalita è pari a* 0.2*. Nell'ipotesi che la probabilità di arresto sia sempre la stessa e che gli arresti avvengano casualmente ed in modo indipendente, calcolare:*

a) la probabilità che si verifichino meno di 2 arresti in 5 salite;

b) il valore atteso e la varianza del numero di arresti in una giornata di esercizio, nell'ipotesi che in una giornata di esercizio il numero di risalite sia una variabile casuale di Poisson con parametro $\lambda = 200$.

a) Indichiamo con X la v.c. *"numero di arresti in 5 salite*, si tratta di una v.c. $\text{Bin}(n = 5, p = 0.2)$. La probabilità richiesta è quindi data da

$$\mathbf{P}(X < 2) = \binom{5}{0} 0.2^0 0.8^5 + \binom{5}{1} 0.2^1 0.8^4 = 0.7373.$$

b) Sia Y la v.c *"numero di salite in un giorno.* Se ci sono y salite in un giorno, allora

$$\mathbf{P}(X = k | Y = y) = \binom{y}{k} 0.2^k 0.8^{y-k} \quad k = 1, \dots, y,$$

e quindi la variabile valore atteso condizionato $\mathbf{E}(X|Y) = Y \cdot 0.2$ e quindi

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(X|Y)\right) = 0.2\mathbf{E}(Y) = 0.2 \cdot 200 = 40.$$

Per il calcolo della varianza sappiamo che

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}\left(\text{Var}(X|Y)\right) + \text{Var}\left(\mathbf{E}(X|Y)\right).$$

Calcoliamo quindi ogni termine:

$$\mathbf{E}\left(\text{Var}(X|Y)\right) = \mathbf{E}(Y 0.2 \cdot 0.8) = 200 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 32,$$

$$\text{Var}\left(\mathbf{E}(X|Y)\right) = \text{Var}(Y \cdot 0.2) = 0.2^2 \cdot 200 = 8,$$

da cui $\text{Var}(X) = 40$.

Esercizio 3.45 (Es 2 del 20/5/96)**.** *Si riprenda l'Esercizio 3.36. Il guadagno nella vendita di un pezzo prodotto v è dato dal ricavo meno il costo di produzione. Tutti i pezzi non dichiarati difettosi vengono venduti; ogni pezzo difettoso venduto comporta una spesa w di risarcimento o manutenzione o sostituzione. Sia N il numero di pezzi venduti su n prodotti; M il numero di pezzi difettosi venduti su n prodotti, X il guadagno effettivo, (cioè al netto delle spese w) su n pezzi prodotti.*

a) Determinare la legge di N;

b) determinare la legge di M;

c) determinare $\mathbf{E}(X)$;

d) posto $n = 600$ pezzi, $v = 5$ milioni al pezzo, $p_1 = 0.97$, $p_2 = 0.03$ $p = 0.02$, $w = 20$ milioni di lire al pezzo, calcolare il guadagno effettivo atteso $\mathbf{E}(X)$.

Poiché si vendono solo i pezzi prodotti che sono dichiarati non difettosi la v.c. N è una Binomiale $B(n, q)$ dove n è pari al numero di pezzi prodotti e q è pari alla probabilità che un pezzo sia dichiarato non difettoso. Con le notazioni dell'esercizio 3.36 la probabilità che un pezzo sia dichiarato non difettoso è $q = \mathbf{P}(\bar{F}) = 1 - (p_1 p + p_2(1-p))$
b) La variabile M conta il numero di pezzi che su n prodotti sono effettivamente difettosi. Si tratta ancora di una v.c. Binomiale $B(n, r)$ dove r è la probabilità che un pezzo venduto (cioè dichiarato non difettoso) sia difettoso. Sempre con le notazioni dell'Esercizio 3.36 abbiamo

$$r = \mathbf{P}(D \cap \bar{F}) = \mathbf{P}(\bar{F}|D)\mathbf{P}(D) = (1 - \mathbf{P}(F|D))\,\mathbf{P}(D) = p(1-p_1).$$

c) Il guadagno effettivo X è ottenuto come guadagno delle vendite al netto delle spese per risarcimento. In formula è dato da $X = Nv - Mw$. Il valore atteso è quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= v\mathbf{E}(N) - w\mathbf{E}(M) = vnq + wnr \\ &= n\Big(v\,(1 - (p_1 p + p_2(1-p))) - wp(1-p_1)\Big).\end{aligned}$$

d) Sostituendo i valori assegnati otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= 600\Big(5\,(1-(0.97\cdot 0.02 + 0.03(1-0.02))) - 20\cdot 0.02(1-0.97)\Big)\\ &= 2846.\end{aligned}$$

Esercizio 3.46 (Es 2 del 17/6/94)**.** *Per il* 40% *dei clienti di una società bisogna ricorrere a strumenti particolari per il recupero dei crediti contrattuali (clienti non affidabili). Si calcolino:*

a) la probabilità che il numero di clienti affidabili sia maggiore di 250 in un campione casuale di $n = 420$ *clienti;*

b) la probabilità che la frequenza relativa dei clienti affidabili sia compresa tra 0.5 *e* 0.7 *in un campione casuale di* $n = 420$ *clienti;*

c) la numerosità n *del campione casuale di clienti affinché la frequenza relativa campionaria di clienti affidabili sia compresa nell'intervallo* $(0.55, 0.65)$ *con probabilità pari a* 0.95.

Se scegliamo a caso un cliente questo risulterà inaffidabile con una probabilità pari a $p = 0.40$. Se scegliamo a caso 420 clienti e supponiamo che la scelta avvenga secondo le ipotesi che definiscono il modello binomiale, il numero di clienti affidabili nel campione è descritto da una variabile casuale $X \sim Bin(n = 420, p = 0.60)$. (Attenzione: si è passati da *inaffidabili* ad *affidabili*!)
a) La probabilità richiesta è

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > 250) = \mathbf{P}(X \geq 251) &= \sum_{k=251}^{420} \binom{420}{k} (0.60)^k (0.40)^{420-k}\\ &= 0.56065.\end{aligned}$$

Il risultato è stato ottenuto utilizzando un programma che prevede il computo delle funzioni cumulatrici delle diverse variabili casuali. Se si provasse a iniziare il conto a "mano" il lavoro da fare sarebbe abbastanza lungo. Utilizziamo quindi il teorema del limite centrale che ci permette di approssimare una v.c. Binomiale, quando n è grande e per valori di p prossimi a 0.5 con una v.c. Gaussiana di parametri $\mu = np$ e $\sigma^2 = np(1-p)$. Calcoliamo quindi:

$$\mu = np = 420 \cdot 0.60 = 252, \qquad \sigma^2 = 420 \cdot 0.60 \cdot 0.40 = 100.8.$$

La probabilità richiesta è

$$\mathbf{P}(X \geq 251) = \mathbf{P}\left(Z \geq \frac{251 - 252}{\sqrt{100.8}}\right) = 0.53967.$$

Dove abbiamo indicato con Z la v.c. normale standardizzata. Il risultato è stato ottenuto sempre con lo stesso programma. Se si hanno a disposizione le tavole della Normale standardizzata si ricava $\phi(0.09) = 0.5359$. Si osservi che il valore calcolato con l'approssimazione della normale si discosta dal valore vero di 0.02. Un netto miglioramento lo si ottiene operando la correzione di continuità che in questo caso equivale a calcolare

$$\mathbf{P}(X \geq 251) = \mathbf{P}(X \geq 250.5) = \mathbf{P}\left(Z \geq \frac{250.5 - 252}{\sqrt{100.8}}\right) = 0.55948.$$

In questo caso l'errore che si commette nell'approssimazione è molto minore: solo 0.0012!
b) Chiedere che la frequenza relativa di clienti affidabili sia compresa nell'intervallo $(0.5, 0.7)$ equivale a chiedere che il numero di clienti affidabili siano un numero compreso tra i valori $(210, 294)$. Infatti la frequenza relativa di clienti affidabili è definita come $Y = \frac{X}{420}$. Quindi $0.5 \leq Y \leq 0.7$ è equivalente a $0.5 \cdot 420 \leq X \leq 0.7 \cdot 420$. La probabilità richiesta è data da

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(210 \leq X \leq 294\right) &\equiv \mathbf{P}\left(\frac{210 - 252}{\sqrt{100.8}} \leq Z \leq \frac{294 - 252}{\sqrt{100.8}}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(-4 \leq Z \leq 4\right) = 1\end{aligned}$$

c) La v.c frequenza relativa $Y = \frac{X}{n}$ può essere approssimata per n grande con una v.c normale di parametri $\mu = p = 0.60$ e $\sigma^2 = \frac{0.60 \cdot 0.40}{n}$. Il valore di n è da determinare in modo tale che sia

$$\mathbf{P}(0.55 \leq Y \leq 0.65) = 0.95.$$

Utilizzando l'approssimazione alla Normale possiamo ricavare n da

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(0.55 \leq Y \leq 0.65) &\equiv \mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}(0.55-0.60)}{\sqrt{0.60\cdot 0.40}} \leq Y \leq \frac{\sqrt{n}(0.65-0.60)}{\sqrt{0.60\cdot 0.40}}\right)\\ &= 0.95\end{aligned}$$

da cui indicando sempre con ϕ la funzione di ripartizione della Normale standardizzata ricaviamo

$$\phi\left(\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{0.24}}\right) - \phi\left(-\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{0.24}}\right) = 0.95.$$

Se indichiamo con $z(n) = \frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{0.24}}$ e con $1-\alpha = 0.95$ possiamo trovare il valore di n cercando il valore di $z(n)$ per cui

$$\phi(z(n)) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Nel nostro caso $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9750$ e le tavole della Normale standardizzata ci forniscono $z(n) = 1.960$ da cui ricaviamo

$$n = \frac{(1.960)^2}{(0.05)^2} 0.24 = 368.78 \equiv 369.$$

Quindi la numerosità del campione deve essere almeno di 369 unità.

Esercizio 3.47 (Es 1 del 8/2/99)**.** *Dal data base della manutenzione di una fabbrica si è rilevato che la durata D in esercizio di un'attrezzatura strategica, fino alla sua rottura, segue la legge di distribuzione Normale con parametri $\mu_D = 250$ ore e $\sigma_D = 20$ ore. Il tecnico della manutenzione programmata ha deciso di sostituire sistematicamente l'attrezzatura dopo un tempo d'esercizio sull'impianto produttivo pari a 220 ore, senza cioè aspettare che si guasti.*

a) Calcolare il numero atteso di sostituzioni programmate da effettuare prima della sostituzione d'emergenza per il guasto dell'attrezzatura.

L'elevato costo di fermata dell'impianto per gli interventi di emergenza dovuti ai guasti dell'attrezzatura ha spinto il responsabile della manutenzione a proteggersi maggiormente dalle interruzioni accidentali. Vuole quindi fissare un tempo di esercizio standard prima della sostituzione programmata dell'attrezzatura tale che sia almeno dello 0.95 *la probabilità che l'attrezzatura stessa non si guasti prima della sostituzione preventiva programmata.*

b) Calcolare il tempo atteso di esercizio (in mesi) prima che l'impianto debba essere fermato d'emergenza per il guasto dell'attrezzatura sapendo che l'impianto lavora a ciclo continuo per 700 *ore al mese e che il tempo per la sostituzione programmata è nullo.*

a) Il nostro tecnico sostituisce l'attrezzatura dopo 220 ore se non ci sono guasti, altrimenti si deve effettuare la sostituzione di emergenza. Indichiamo con p la probabilità che si verifichi un guasto prima delle 220 ore. Il numero di sostituzioni programmate da effettuare prima di una sostituzione di emergenza può essere considerato come la determinazione di una variabile casuale geometrica dove il successo rappresenta la sostituzione di emergenza cioè il fatto che il guasto si è verificato prima delle 220 ore. Quindi $X = k$ per $k = 0, 1, \dots$ rappresenta il numero di insuccessi (cioè numero di sostituzioni sistematiche) prima del primo successo (cioè sostituzione di emergenza). Risulta quindi

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1-p}{p}.$$

Il parametro p è determinato dal modello definito dalla variabile D. Si ha

$$p = \mathbf{P}(D < 220) = \mathbf{P}(Z < -1.5) = 1 - \phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

e quindi $\mathbf{E}(X) = 13.97$. Cioè ci si possono attendere circa 14 sostituzioni programmate prima di di effettuarne una di emergenza.
b) Il tecnico vuole trovare un tempo standard D_0 in modo tale che $\mathbf{P}(D > D_0) = 0.95$. Quindi

$$\mathbf{P}(D > D_0) = \mathbf{P}\left(Z > \frac{D_0 - 220}{20}\right) = \mathbf{P}(Z > z) = 0.95.$$

Dalle tavole si ricava $z = -1.645$ da cui $D_0 = 217.1$. In questo caso il tempo di esercizio prima che la macchina debba essere fermata per un guasto di emergenza è una variabile aleatoria definita da $T = 217.1 \cdot X$, per cui

$$\mathbf{E}(T) = 217.1\mathbf{E}(X) = 217.1\frac{0.95}{0.05} = 4124.9,$$

che espressa in mesi equivale a $\frac{4124.9}{700} = 5.89$ cioè circa 6 mesi.

Esercizio 3.48 (Es 3 del 21/1/94). *Il gestore di un servizio di noleggi giornalieri di slittini sa che il numero medio di noleggi in una giornata festiva è di otto slittini. Nell'ipotesi che il numero di noleggi in un giorno festivo sia una variabile di Poisson, calcolare:*

a) la probabilità che in una giornata vengano noleggiati non più di 5 slittini.

b) il valore atteso del tempo intercorrente tra due noleggi se è possibile noleggiare slittini in una giornata festiva dalle 9 alle 13.

a) Sia X la variabile casuale *"numero di slittini noleggiati in un giorno festivo.* Si tratta di una variabile di Poisson con parametro $\lambda = 8$ con l'intervallo di tempo in cui osservo il fenomeno fissato sull'orario di apertura del noleggiatore che fissiamo come unità di tempo. La probabilità richiesta è

$$\mathbf{P}(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \frac{8^k e^{-8}}{k!} = 0.1912.$$

b) Se il numero di noleggi in una giornata festiva si effettua durante 4 ore, la variabile casuale T tempo di attesa (in ore) tra due slittini noleggiati è una variabile Esponenziale di parametro $\lambda = \frac{8}{4}$ poiché un'ora rappresenta $\frac{1}{4}$ dell'intervallo di tempo fissato nel quale è osservato il fenomeno. Il valore atteso è dunque: $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$, cioè mezz'ora.

Esercizio 3.49 (Es 2 del 17/5/99). *Il tempo di attesa dell'arrivo di un correntista alla banca CIP è una variabile casuale esponenziale di media 5 minuti.*

a) Trovare la probabilità che il primo cliente arrivi nei prossimi 10 minuti;

b) trovare la probabilità che nei prossimi 10 minuti arrivino più di due clienti;

c) determinare la probabilità che il secondo cliente giunga alla banca dopo 10 minuti.

Sia T la variabile tempo di attesa per l'arrivo di un correntista alla banca. La densità di tale variabile è

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \quad \lambda > 0.$$

Poiché $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$, ricaviamo il valore del parametro λ sapendo che $\mathbf{E}(T) = 5$, da cui, $\lambda = \frac{1}{5}$.
a) Si tratta di trovare la probabilità che il tempo di attesa per l'arrivo del primo cliente sia inferiore a 10 minuti. Quindi

$$\mathbf{P}(T < 10) = \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-2} = 0.8647.$$

b) Indichiamo con X_t la variabile che conta il numero di clienti che arrivano nell'intervallo $(0, t)$. Si tratta di una variabile di Poisson con parametro λt. Poiché in questo caso $t = 10$ e $\lambda = \frac{1}{5}$, si ha

$$\mathbf{P}(X_t > 2) = \mathbf{P}(X_{10} > 2) = \sum_{x=3}^{+\infty} \frac{2^x e^{-2}}{x!} = 0.32332.$$

c) Indichiamo con Y la variabile che descrive il tempo di attesa per l'arrivo del secondo cliente. Si tratta di una variabile Gamma con parametri $r = 2$ e $\lambda = \frac{1}{5}$.

$$\mathbf{P}(Y > 10) = \mathbf{P}(X_{10} \leq 1) = \sum_{j=0}^{1} \frac{2^j e^{-2}}{j!} = e^{-2}(1 + 2) = 0.40601.$$

Esercizio 3.50 (Es 5 del 17/5/93). *La suola portante di un forno industriale ha un tempo atteso di durata di un anno e tre mesi; il cedimento della suola è provocato da cause accidentali connesse alle operazioni di carico e scarico e gli intervalli tra due cedimenti sono variabili casuali esponenziali e indipendenti in probabilità . Si determinino:*

a) la probabilità che il secondo cedimento si verifichi dopo il quarto anno di funzionamento del forno;

b) la probabilità che in un anno si verifichino almeno due cedimenti.

Cominciamo con l'osservare che un anno e tre mesi è pari a 1.25 anni. Sappiamo che il tempo T di durata del forno è una v.a. Esponenziale di parametro λ. Per determinare il valore di tale parametro sappiamo dal testo che $\mathbf{E}(T) = 1.25$. Quindi, poiché $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$, determiniamo il valore di λ uguagliando $\frac{1}{\lambda} = 1.25$, che risolta porge $\lambda = 0.8$. Osserviamo inoltre che il numero di cedimenti che si verificano in un intervallo di tempo unitario (1 anno) è una v.a. di Poisson con parametro $\lambda = 0.8$. Mentre il numero di cedimenti che si verificano in un intervallo di tempo t misurato in anni è una variabile aleatoria di Poisson con parametro $0.8 \cdot t$.
a) Per le ipotesi fatte, la variabile aleatoria X, istante in cui si verifica il secondo cedimento, è una v.a. Gamma di parametri $r = 2$ e $\lambda = 0.8$. Indichiamo con Y_t la v.a. che descrive il numero di cedimenti nell'intervallo di tempo t. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > 4) = \mathbf{P}(Y_4 \leq 1) &= \sum_{k=0}^{1} \frac{(0.8 \cdot 4)^k e^{-(0.8 \cdot 4)}}{k!} = \sum_{k=0}^{1} \frac{(3.2)^k e^{-(3.2)}}{k!} \\ &= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(3.2)^k e^{-(3.2)}}{k!} = 1 - 0.82880 = 0.1712,\end{aligned}$$

dove il terzultimo passaggio è stato eseguito per poter utilizzare le tavole a nostra disposizione. Chiaramente il conto può essere eseguito direttamente!
b) Indichiamo con Y_1 la v.a. che descrive il numero di cedimenti in un

anno. Si ha:

$$\mathbf{P}(Y_1 \geq 2) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(0.8)^k e^{-(0.8)}}{k!} = 0.19121.$$

Anche in questo caso il valore è stato ottenuto dalle tavole. Se non si hanno a disposizione il valore della probabilità può essere ottenuto direttamente:

$$\mathbf{P}(Y_1 \geq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{(0.8)^k e^{-(0.8)}}{k!} = 1 - e^{-(0.8)}\,(1 + 0.8) = 0.19121.$$

Esercizio 3.51 (Es 2 del 17/6/02)**.** *La distribuzione del tempo (in minuti) che intercorre tra un arrivo e l'altro di due telefonate ad un centralino è una variabile casuale esponenziale avente densità*

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

a) Sapendo che la probabilità che intercorra più di un minuto tra una telefonata e l'altra è 0.5*, calcolare il valore del parametro* λ*.*

b) Calcolare quindi la probabilità che in un minuto arrivino almeno due chiamate.

c) Calcolare la probabilità che in tre minuti non arrivino chiamate.

Si tratta di una variabile casuale Esponenziale con parametro λ.

a) Per determinare il valore del parametro dobbiamo risolvere l'equazione

$$\int_1^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t} dt = 0.5$$

Risolvendo l'integrale si ricava $\lambda = 0.6931472$.

b) Sia Y_t la variabile casuale che conta il numero di chiamate in t minuti.

$$\mathbf{P}(Y_1 > 2) = 1 - \mathbf{P}(Y_1 \leq 1) = 1 - 0.8465736 = 0.1534264.$$

c) Sia Y_3 la variabile che conta il numero di chiamate in 3 minuti. $Y_3 \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 3) = \text{Poisson}(2.079)$

$$\mathbf{P}(Y_3 = 0) = 0.125.$$

Esercizio 3.52 (Es 1 del 11/11/02)**.** *La durata di un utensile è una variabile casuale esponenziale avente densità*

$$f_X(x) = \frac{e^{1-x}}{e-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Se l'utensile si rompe all'istante x, l'azienda sopporta un costo relativo al valore dell'utensile che può essere dato da $c \cdot Y$ dove c è una costante positiva e Y è una variabile casuale ottenuta trasformando la variabile casuale X nel seguente modo:

$$Y = X(1 - X)$$

a) Calcolare la probabilitità che la durata dell'utensile sia minore di $\frac{1}{2}$.

b) Quale è il campo di variazione della variabile casuale Y?

c) Quale è il costo medio che deve sopportare l'azienda?

Si tratta di una variabile casuale esponenziale troncata su $[0, 1]$.

a) Dobbiamo calcolare

$$\mathbf{P}(X < 1/2) = \int_0^{1/2} \frac{e^{-x}}{1-e} dx = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-1}} = 0.62.$$

b) Poiché X varia tra 0 e 1, Y varia ancora tra 0 e 1.

c) Dobbiamo calcolare

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^1 x(1-x)e^{-x} dx = \frac{(5e^{-1} - 2) + (1 - 2e^{-1})}{1 - e^{-1}} = 0.16.$$

Il costo medio per l'azienda risulta pertanto $c \cdot 0.16$.

Esercizio 3.53 (Es 2 del 19/9/94)**.** *Una ditta produce e vende un certo filtro industriale che ha un tempo di vita che segue una legge esponenziale. La vita media è di* 2.5 *anni e la ditta si impegna, per garanzia, a sostituirlo se esso cessa di funzionare entro due anni.*

a) Qual'è la probabilità che la ditta debba intervenire per un singolo pezzo?

b) Che tempo di garanzia dovrebbe stabilire la ditta in modo da dover intervenire in non più del 10% *dei casi?*

La densità della variabile T tempo di vita è

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t > 0, \qquad \lambda > 0.$$

Sappiamo che $\mathbf{E}(T) = 2.5$ da cui ricaviamo

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\lambda} = 2.5$$

e quindi $\lambda = 0.4$.
a) Basta calcolare

$$\mathbf{P}(T \leq 2) = \int_0^2 0.4 e^{-0.4t} dt = 1 - e^{-0.8} = 0.55.$$

b) Dobbiamo determinare t tale che $\mathbf{P}(T \leq t) \leq 0.1$. Che equivale a risolvere la disequazione

$$1 - e^{-0.4t} \leq 0.1$$

da cui si ricava $t \leq 2.5 \ln \frac{10}{9} = 0.263$.

Esercizio 3.54 (Es 4 del 10/9/93)**.** *La quantià X di giacenza giornaliera di una certa materia prima ha media di 55 quintali, varianza 605 e distribuzione di tipo Gamma. Calcolare:*

a) la probabilità che la giacenza X di inventario giornaliero sia minore alla soglia critica di 25 quintali;

b) *il valore critico x_0 quintali tale che risulti* 0.05 *la probabilità di avere una giacenza d'inventario giornaliero più bassa;*

c) *inoltre, calcolare il valore critico x_0 del punto b) precedente, nell'ipotesi di assumere la distribuzione di X di tipo Normale;*

a) La variabile aleatoria Gamma di parametri λ ed r ha densità data da

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

ed il suo valore atteso è pari a $\frac{r}{\lambda}$ mentre la varianza è pari a $\frac{r}{\lambda^2}$. Con i dati a disposizione dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} \frac{r}{\lambda} = 55 \\ \frac{r}{\lambda^2} = 605 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $r = 5$ e $\lambda = 0.091$. La probabilità è quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X < 25) = {} & \int_0^{25} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-0.091 \cdot 25}(0.091 \cdot 25)^k}{k!} \\ = {} & 0.0809. \end{aligned}$$

Se non si vogliono fare i conti si può ricorrere alle tavole cumulate delle distribuzione di Poisson. Poiché $0.091 \cdot 25 = 2.3$ dalle tavole della Poisson cumulata ricaviamo

$$1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-0.091 \cdot 25}(0.091 \cdot 25)^k}{k!} = \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{e^{2.3}(2.3)^k}{k!} = 0.08$$

b) Sarà sicuramente $x_0 < 25$. Le tavole della distribuzione cumulata di Poisson ci danno, per $x_0 = 23$

$$\mathbf{P}(X < 23) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-0.091 \cdot 23}(0.091 \cdot 23)^k}{k!} = \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{e^{2.1}(2.1)^k}{k!} = 0.06.$$

Per $x_0 = 21$ ricaviamo

$$\mathbf{P}(X < 21) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-0.091\cdot 21}(0.091 \cdot 21)^k}{k!} = \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{e^{1.9}(1.9)^k}{k!} = 0.04.$$

Proviamo quindi con $x_0 = 22$ ed otteniamo

$$\mathbf{P}(X < 22) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-0.091\cdot 22}(0.091 \cdot 22)^k}{k!} = \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{e^{2.0}(2.0)^k}{k!} = 0.05.$$

Quindi il valore richiesto è $x_0 = 22$.
c) Se ipotiziamo che la giacenza sia una v.a. Normale di parametri $\mu = 55$ e $\sigma^2 = 605$ il valore critico lo troviamo ricorrendo alla standardizzazione della v.a. X e quindi all'uso delle tavole della Normale standardizzata.

$$\mathbf{P}(X < x_0) = \mathbf{P}\left(Z < \frac{x_0 - 55}{\sqrt{605}}\right) = 0.05.$$

Dalle tavole ricaviamo che $\frac{x_0-55}{\sqrt{605}} = -1.645$ e quindi $x_0 = 15$ quintali.

Esercizio 3.55 (Es 2 del 23/9/96)**.** *Siano X_1 e X_2 due variabili casuali Normali standardizzate e stocasticamente indipendenti e sia:*

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_1^2 + X_2^2.$$

a) Si determini il valore di y tale che

$$\mathbf{P}\left(Y_1 > y\right) = \mathbf{P}\left(Y_2 < \mathbf{E}\left(Y_2\right) + 2\sqrt{Var(Y_2)}\right).$$

b) Si determini la funzione di densità della variabile casuale Y_2^2.

a) Dalle informazioni del testo deduciamo che la v.c Y_1 è una v.c. Normale di parametri $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 2$, mentre la v.c. Y_2 è una v.c. Chi-quadrato con parametro $k = 2$. Quindi sappiamo che

$$\mathbf{E}\left(Y_2\right) = 2, \quad \mathrm{Var}\left(Y_2\right) = 4$$

da cui ricaviamo

$$\mathbf{P}\left(Y_2 < \mathbf{E}(Y_2) + 2\sqrt{\mathrm{Var}(Y_2)}\right) = \mathbf{P}(Y_2 < 6).$$

È noto che la v.c. Chi-quadrato con due gradi di libertà è una v.c Esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Quindi

$$\mathbf{P}(Y_2 < 6) = \int_0^6 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = 1 - e^{-3} = 0.95.$$

Per trovare il valore di y basta quindi trovare quel valore per cui $\mathbf{P}(Y_2 > y) = 0.95$. Standardizzando e ricorrendo alle tavole della Normale standardizzata ricaviamo

$$\mathbf{P}\left(Z > \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = 0.95, \quad \frac{y}{\sqrt{2}} = -1.645, \quad y = -2.3264.$$

b) La v.c $Z = Y_2^2$ assume solo valori positivi. Ricaviamo quindi per $x > 0$ la funzione di ripartizione di tale variabile.

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}\left(Y_2^2 \le x\right) = \mathbf{P}\left(-\sqrt{x} \le Y_2 \le \sqrt{x}\right) = \mathbf{P}\left(0 \le Y_2 \le \sqrt{x}\right) \\ &= \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} dz = 1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

La funzione di densità della v.c. Z risulta pertanto

$$f_Z(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Esercizio 3.56 (Es 2 del 8/7/96). *Per proteggersi dal rischio di dover scartare pezzi per sottolunghezza, un certo laminato viene fabbricato da 0 a un metro più lungo dalla lunghezza nominale richiesta e la taratura dell'impianto è tale da produrre i pezzi con la sovralunghezza che può essere considerata una variabile casuale X distribuita uniformemente nell'intervallo* $[0, 1]$. *Sia Y la variabile casuale numero di pezzi che* *risultano difettosi alla lavorazione successiva e si assuma che la distribuzione condizionata di Y dato $X = x$ abbia una distribuzione binomiale con parametri n e $p = x$; cioè*

$$\mathbf{P}(Y = y|X = x) = \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y}.$$

Trovare la legge di probabilità di Y e il numero atteso di pezzi difettosi alla seconda lavorazione, cioè $\mathbf{E}(Y)$; calcolare $\mathbf{E}(Y)$ quando $n = 100$.

La variabile Y assume i valori $y = 0,1,\ldots,n$. Indichiamo con $p_{Y|X}(y|x)$ la densità condizionata e con $f_X(x)$ la densità della v.c. X. Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y = y) &= \int_0^1 p_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx = \int_0^1 \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y} 1 dx \\
&= \binom{n}{y} \int_0^1 x^y (1-x)^{n-y} dx = \binom{n}{y} \frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}{\Gamma(n+2)} \\
&= \binom{n}{y} \frac{y!(n-y)!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

La v.c. Y è dunque distribuita come una Uniforme Discreta di parametro $n + 1$. Il valore atteso è

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{y=0}^{n} y \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{y=1}^{n} y = \frac{1}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}.$$

Per $n = 100$ si ha quindi $\mathbf{E}(Y) = 50$.

Esercizio 3.57 (Es 1 del 10/9/93)**.** *Sia data la seguente distribuzione di frequenza*

x_i	2	4	6	8
f_i	f_1	f_2	f_3	f_4

Calcolare la varianza sapendo che la distribuzione è simmetrica e che la media armonica è uguale a 4.

Innanzitutto affinché sia una distribuzione di frequenza deve essere soddisfatta la condizione $\sum_{i=1}^{4} f_i = 1$. La media armonica è definita come

$$M_A(X) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{f_i}{x_i}}.$$

Poiché $M_A(X) = 4$ abbiamo che deve essere soddisfatta la condizione

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{f_i}{x_i} = \frac{1}{4},$$

cioè

$$\frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{4} + \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{8} = \frac{1}{4}.$$

Inoltre poiché si richiede che la distribuzione sia simmetrica devono essere soddisfatte le condizioni $f_1 = f_4$ e $f_2 = f_3$. Quindi ci riduciamo a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2f_1 + 2f_2 = 1 \\ \frac{5}{8}f_1 + \frac{5}{12}f_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

che risolto da $f_1 = f_4 = \frac{1}{5}$ e $f_2 = f_3 = \frac{3}{10}$. La distribuzione di frequenza risulta quindi

x_i	2	4	6	8
f_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

Calcoliamo quindi il valore atteso:

$$\mathbf{E}(X) = 2\frac{1}{5} + 4\frac{3}{10} + 6\frac{3}{10} + 8\frac{1}{5} = \frac{50}{10} = 5,$$

e la varianza:

$$\text{Var}(X) = (2-5)^2\frac{1}{5} + (4-5)^2\frac{3}{10} + (6-5)^2\frac{3}{10} + (8-5)^2\frac{1}{5} = \frac{42}{10} = 4.2.$$

Esercizio 3.58 (Es 2 del 4/9/02)**.** *La resistenza alla tensione di un utensile è descritta dalla variabile casuale* X *avente densità* $f(x) = \frac{x}{2} - 1$, $2 < x < k$, *determinare:*

a) il valore di k *che rende la funzione data una funzione di densità di probabilità;*

b) il valore atteso e la varianza della variabile casuale X *avente la densità determinata al punto a);*

c) la probabilità che la tensione X *sia minore o uguale a* $2 + \sqrt{2}$ *e commentare il risultato.*

In generale, si definisce funzione di densità di una v.c. continua X nell'intervallo [a; b] la funzione che possiede le seguenti proprietà:

$$i) f(x) \geq 0, x \in [a, b] \quad ii) \int_a^b f(x)dx = 1.$$

a) La funzione $f(x)$ assegnata soddisfa il primo requisito. Per quanto riguarda il secondo requisito, è necessario determinare il valore di k che soddisfa:

$$\int_2^k \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx = 1.$$

Risolvendo tale equazione si ricava $k = 4$. La funzione di densità è dunque $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ per $2 \leq x \leq 4$.

b) Calcolo della media e della varianza di X:

$$E(X) = \int_2^4 x \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx = \frac{10}{3};$$

$$E(X^2) = \int_2^4 x^2 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx = \frac{34}{3};$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{34}{3} - \frac{100}{9} = \frac{2}{9}.$$

c) La probabilità richiesta è la seguente

$$P[X \leq (2+\sqrt(2)] = \int_2^{2+\sqrt(2)} f(x)dx = 0.5,$$

pertanto il valore $2+\sqrt(2)$ è quello mediano.

Esercizio 3.59 (Es 4 del 17/5/93)**.** *Sia X una variabile casuale con funzione di ripartizione*

$$F(x) = x^p, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad p \geq 0.$$

Si determinino:

a) la funzione di densità di probabilità , il valore atteso e la varianza di X;

a) La densità della v.a. X si trova derivando rispetto a x la funzione di ripartizione, essendo quest'ultima continua nell'intervallo considerato.

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F(x) = px^{p-1}.$$

Calcoliamo quindi i primi due momenti:

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^1 px^p dx = \left.\frac{px^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{p}{p+1};$$

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \int_0^1 px^{p+1} dx = \left.\frac{px^{p+2}}{p+2}\right|_0^1 = \frac{p}{p+2}.$$

La varianza è dunque

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{p+2}\left(\frac{p}{p+1}\right)^2 = \frac{p}{(p+1)^2(p+2)}.$$

Esercizio 3.60 (Es 2 del 18/4/00)**.** *Sia X la variabile casuale che descrive la resistenza alla trazione di un materiale. Supponendo che la funzione di densità di X sia*

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta(x-a)}, \quad x > a,$$

dove $\theta > 0$ e $a > 0$ sono due parametri reali che dipendono dal tipo di materiale, calcolare:

a) $\mathbf{P}(X > \mathbf{E}(X))$ *;*

b) il quinto percentile di X.

a) Calcoliamo il valore atteso della variabile casuale X.

$$\mathbf{E}(X) = \int_a^{+\infty} x\theta e^{-\theta(x-a)}dx = \int_0^{+\infty} (y+a)\theta e^{-\theta y}dy = \frac{1}{\theta} + a.$$

Possiamo quindi calcolare

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > \mathbf{E}(X)) = \mathbf{P}(X > \frac{1}{\theta} + a) &= \int_{\frac{1}{\theta}+a}^{+\infty} \theta e^{-\theta(x-a)}dx \\ &= \int_{\frac{1}{\theta}}^{+\infty} \theta e^{-\theta y}dy = 1 - e^{-1} = 0.6321.\end{aligned}$$

b) Il quinto percentile è definito come il valore p tale che $\mathbf{P}(X \leq p) = 0.05$. Calcoliamo dunque

$$\mathbf{P}(X \leq p) = \int_a^p \theta e^{-\theta(x-a)}dx = \int_0^{p-a} \theta e^{-\theta y}dy = 1 - e^{-\theta(p-a)}$$

e ricaviamo p dall'equazione

$$1 - e^{-\theta(p-a)} = 0.05,$$

la cui soluzione è

$$p = a - \frac{1}{\theta}\log(0.95).$$

Esercizio 3.61 (Es 3 del 12/9/95)**.** *Sia X una variabile casuale con distribuzione avente densità*

$$f(x) = cx^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$$

a) *Calcolare il valore della costante c affinché $f(x)$ possa considerarsi una densità;*

b) *calcolare il valore atteso e la varianza di X;*

c) *trovare la densità della variabile casuale $Y = X^2$.*

a) Innanzitutto la costante deve essere positiva. Inoltre deve essere

$$\int_{-1}^{2} cx^2 dx = 1$$

Da quest'ultima si ricava $3c = 1$ da cui $c = \frac{1}{3}$.
b) Il valore atteso di X è dato da

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-1}^{2} cx^3 dx = \frac{5}{4}.$$

Per calcolare $\mathrm{Var}(X)$, calcoliamo prima il momento secondo di X

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \int_{-1}^{2} cx^4 dx = \frac{11}{5}$$

e quindi $\mathrm{Var}(X) = \frac{51}{80}$.
c) La variabile casuale $Y = X^2$ assume valori $0 \leq y \leq 4$, poiché la variabile X assume i valori $-1 \leq x \leq 2$. Osserviamo inoltre che i valori $0 \leq y \leq 1$ sono assunti da Y se X assume valori $-1 \leq x \leq 1$. Calcoliamo la funzione di ripartizione per $0 \leq y \leq 1$

$$\mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} cx^2 dx = \frac{2}{9}\sqrt{y^3}$$

e quindi la funzione di densità risulta

$$f_Y(y) = \frac{1}{3}\sqrt{y}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Nel caso in cui $1 \leq y \leq 4$, calcoliamo direttamente la funzione di densità

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}\sqrt{y}, \quad 1 \leq y \leq 4$$

Risulta pertanto

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{y}, & \text{per } 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{6}\sqrt{y}, & \text{per } 1 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Lasciamo verificare che si tratta di una densità. Occorre far vedere che

$$\int_1^4 f_Y(y)dy = 1.$$

Esercizio 3.62 (Es 1 del 23/9/96)**.** *Sia X una variabile aleatoria avente per densità la funzione*

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + k\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)x}{\sqrt{\pi}}, \quad -1 < x < +1.$$

Si dica per quali valori del parametro k $f(x)$ è una densità di probabilità . Inoltre:

- *a) si determinino $\mathbf{E}(X)$ e Var(X);*
- *b) si trovi il valore di k per cui Var(X) è massima;*
- *c) si trovi il valore di k per cui si ha Var$(X) = \mathbf{E}(X)$.*

Poiché $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ la densità è

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + kx\right), \quad -1 < x < +1.$$

La prima condizione da verificare è che $f(x) \geq 0$ per ogni x tale che $-1 < x < +1$. Al variare di k le funzioni di densità costituiscono un fascio di rette con centro nel punto di coordinate $(0, \frac{1}{2})$. Per $k = 0$ abbiamo la retta parallela all'asse delle ascisse, che rappresenta la densità Uniforme tra -1 e $+1$. Per $k \neq 0$ tali rette intersecano l'asse delle ascisse nel punto $x = -\frac{1}{k}$. Se $k > 0$ $f(x) \geq 0$ solo se $-\frac{1}{k} < x < 1$, che solo per $0 < k \leq 1$ coincide con l'intervallo $-1 < x < +1$. Se $k < 0$ $f(x) \geq 0$ solo se $-1 < x < -\frac{1}{k}$, che solo per $-1 < k \leq 0$ coincide con l'intervallo $-1 < x < +1$. La seconda condizione che deve essere soddisfatta è che l'area sotto la curva della densità sia pari a 1. Se $k \leq -1$ dobbiamo vedere per quali k è soddisfatta

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{-\frac{1}{k}} (1 + kx)dx = 1.$$

Calcolando l'integrale otteniamo $(k + 1)^2 = 0$ che è soddisfatta solo per $k = 1$. Se invece $-1 < k < 0$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 + kx)dx = 1.$$

risulta soddisfatta per ogni valore di k. Le stesse motivazioni si possono ripetere nel caso di $k > 0$ e quindi possiamo concludere che $f(x)$, $-1 < x < 1$ è una densità per $-1 \leq k \leq +1$.

a) Con calcoli diretti si ottiene

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(1 + kx)dx = \frac{k}{3},$$

$$\mathbf{E}(X^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1 + kx)dx = \frac{1}{3},$$

e quindi $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} - \frac{k^2}{9}$. Si osservi che per $k = 0$ ritroviamo i valori noti del valore atteso e della varianza della variabile aleatoria Uniforme.

b) La varianza di X è massima se $\frac{k^2}{9}$ è minimo, quindi per $k = 0$.

c) Per trovare il valore di k richiesto basta risolvere l'equazione

$$\frac{k}{3} = \frac{1}{3} - \frac{k^2}{3},$$

che si riduce a $k^2+3k+3=0$. Risolta fornisce i valori $k=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ dei quali accettiamo solo $k=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$.

Esercizio 3.63 (Es 3 del 9/9/93)**.** *Una piastra ha forma di un quadrato con lato l (in metri) che è una variabile casuale di densità*

$$f(l)=\frac{\sqrt{\pi}l^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)e^{l^2}}$$

ed ha peso di 2 *kg al* m^2*. Sia* K *la variabile casuale peso della piastra:*

a) calcolare il peso k_0 *tale che sia* 0.05 *la probabilità di essere superato, cioè tale che sia:*

$$\mathbf{P}(K>k_0)=0.05;$$

b) trovare la probabilità che la piastra pesi meno di 1 kg.

Indichiamo con L la v.c. lato del quadrato. Chiaramente deve essere $l>0$ e poiché $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ la densità di L diventa, dopo le semplificazioni:

$$f_L(l)=2le^{-l^2},\quad l>0.$$

La variabile peso della lastra quadrata è definita come $K=2L^2$. Chiaramente anche K assume solo valori $k>0$. Troviamo la funzione di ripartizione della variabile K. Per $k>0$ abbiamo:

$$\begin{aligned}F_K(k)&=\mathbf{P}(K\le k)=\mathbf{P}\left(2L^2\le k\right)=\mathbf{P}\left(-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\le L\le\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\right)\\&=\mathbf{P}\left(-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\le L\le\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\right)=\int_0^{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}}2le^{-l^2}dl=1-e^{-\frac{k}{2}}\end{aligned}$$

Allora

$$\mathbf{P}\left(K>k_0\right)=e^{-\frac{k}{2}}$$

e quindi se vogliamo che $\mathbf{P}(K>k_0)=0.05$ basta trovare il valore k_0 che soddisfa $e^{-\frac{k}{2}}=0.05$. Ricaviamo $k_0=5.9915$.

b) Direttamente ricaviamo

$$\mathbf{P}(K<1)=1-e^{-\frac{1}{2}}=0.3935.$$

3.4 Vettori Aleatori

Esercizio 3.64 (Es 3 del 22/9/97). *Siano X e Y due variabili casuali aventi la seguente funzione di densità congiunta:*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{-y}\left(1-e^{-x}\right)\mathbb{I}_{(0,y)}(x)\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(y) \\ &\quad + e^{-x}\left(1-e^{-y}\right)\mathbb{I}_{(0,x)}(y)\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x). \end{aligned}$$

a) Calcolare il coefficiente di correlazione fra X e Y.

b) Calcolare $\mathbf{E}(Y|X=x)$ per $X>0$.

c) Stabilire se X e Y sono indipendenti.

a) Il coefficiente di correlazione $\rho(X,Y)$ è definito da

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathbf{E}(X,Y)-\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Per calcolare le quantià che compaiono nella definizione procuriamoci le distribuzioni delle v.c. X e Y. Osserviamo che poiché $f(x,y)=f(y,x)$ la densità di X sarà uguale a quella di Y. Abbiamo quindi per ogni $x>0$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^{+\infty} e^{-y}\left(1-e^{-x}\right)dy + \int_0^x e^{-x}\left(1-e^{-y}\right)dy \\ &= \left(1-e^{-x}\right)e^{-x} + e^{-x}\left(x-e^{-x}-1\right) \\ &= xe^{-x}. \end{aligned}$$

La funzione di densità di Y sarà quindi $f_Y(y)=ye^{-y}$ per $y>0$. Risulta

$$\mathbf{E}(Y)=\mathbf{E}(X)=\int_0^{+\infty} z^2e^{-z}dz=\Gamma(3)=2.$$

Si osservi che l'integrale può essere calcolato direttamente. Per il momento secondo abbiamo

$$\mathbf{E}\left(Y^2\right)=\mathbf{E}\left(X^2\right)=\int_0^{+\infty} z^3e^{-z}dz=\Gamma(4)=6.$$

Quindi risulta $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = 6 - 4 = 2$. Calcoliamo il momento misto del prim'ordine.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= 2\int_0^{+\infty}\int_0^{y} xye^{-y}\left(1-e^{-x}\right)dxdy \\
&= 2\int_0^{+\infty} ye^{-y}\left(\frac{y^2}{2} + ye^{-y} + e^{-y} - 1\right)dy \\
&= \Gamma(4) + \frac{\Gamma(3)}{2^2} + \frac{\Gamma(2)}{2} - \frac{\Gamma(2)}{2} = 5.
\end{aligned}$$

Ricaviamo quindi $\rho(X, Y) = \frac{1}{2}$.
b) Per definizione di speranza matematica condizionata di Y dato $X = x$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y|X = x) &= \frac{1}{xe^{-x}}\int_0^{x} e^{-x}\left(1-e^{-y}\right)dy + \frac{1}{xe^{-x}}\int_x^{+\infty} e^{-y}\left(1-e^{-x}\right)dy \\
&= \frac{e^{-x}}{xe^{-x}}\left(\frac{x^2}{2} + xe^{-x} + e^{-x} - 1\right) + \frac{1-e^{-x}}{xe^{-x}}\left(xe^{-x} + e^{-x}\right) \\
&= \frac{x+2}{2}.
\end{aligned}$$

c) La variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti. Lo si deduce sia dal punto a), perché se lo fossero si avrebbe $\rho(X, Y) = 0$, sia dal punto b), in quanto se lo fossero la speranza condizionata non dovrebbe dipendere da x.

Esercizio 3.65 (Es 1 del 22/9/97)**.** *La durata X in ore di un utensile segue la legge Esponenziale di valore atteso $\mathbf{E}(X) = 2$ ore. Calcolare la probabilità che su 20 di tali utensili esattamente $n_1 = 10$, $n_2 = 6$, $n_3 = 4$, abbiano durata compresa rispettivamente negli intervalli $(0, 2]$, $(2, 4]$, $(4, +\infty)$ ore.*

Indicata con (Y_1, Y_2) una variabile casuale Multinomiale a parametri $n = 20$ $p_1 = \mathbf{P}(0 < X \le 2)$ e $p_2 = \mathbf{P}(2 < X \le 4)$ la probabilità richiesta p è data da

$$p = \mathbf{P}(Y_1 = 10, Y_2 = 6) = \frac{20!}{10!\,6!\,4!}p_1^{10}p_2^{6}p_3^{4} \tag{3.8}$$

dove p_3 è chiaramente $\mathbb{P}(X \geq 4)$. Calcoliamo quindi p_1, p_2 e p_3. Indichiamo con $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ la funzione di densità della variabile X otteniamo

$$p_1 = \int_0^2 f_X(x)dx = 1 - e^{-1} = 0,632;$$
$$p_2 = \int_2^4 f_X(x)dx = e^{-1} - e^{-2} = 0,233;$$
$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 0,135.$$

Sostituendo nella (3.8) i valori trovati abbiamo finalmente

$$p = 0,02.$$

Esercizio 3.66 (Es 2 del 22/9/97)**.** *I guasti al funzionamento di un grosso mezzo per trasporti industriali interni si verificano in media nella misura di* 0,8 *al mese e seguono la legge di Poisson. Consideriamo l'evento G = "Verificarsi del terzo guasto dal tempo zero. Se l'evento G si verifica prima che siano trascorsi due mesi, il costo per la società è nullo in quanto in questo caso il mezzo preso a nolo è coperto da garanzia; se l'evento G si verifica tra il secondo e il quinto mese, la società sostiene un costo stimato in* 8 *milioni di lire; se G si verifica dopo il quinto mese, il costo per la società è di* 5 *milioni di lire. Calcolare il costo atteso per la società che ha preso a nolo il mezzo.*

Indichiamo con X la v.a. *numero di guasti del grosso mezzo* e con T la v.a. *tempo di attesa per il verificarsi del terzo guasto*. Se X è una variabile di Poisson con parametro $\lambda = 0,8$ allora T è una variabile Gamma con parametri $r = 3$ e $\lambda = 0,8$. Sia C la v.a. *costo per l'azienda*. La variabile C assume i valori 0, 8, e 5 rispettivamente se $T < 2$, $2 \leq T < 5$ e $T \geq 5$. Il valore atteso è quindi dato da

$$\mathbf{E}(C) = 0 \cdot \mathbf{P}(T < 2) + 8 \cdot \mathbf{P}(2 \leq T < 5) + 5 \cdot \mathbf{P}(T \geq 5).$$

La funzione di ripartizione della variabile T è data da (vedi formula (A.6) dell'Appendice).

$$F_T(t) = 1 - \sum_{j=1}^{2} \frac{e^{-0,8t}(0,8t)^j}{j!}.$$

dalla quale ricaviamo $F_T(2) = 0,224$ e $F_T(5) = 0,762$. Da cui $\mathbf{P}(T < 2) = 0,224$, $\mathbf{P}(2 \leq T < 5) = 0,538$ e $\mathbf{P}(T \geq 5) = 0,238$ e quindi $\mathbf{E}(C) = 5,5$ milioni di lire.

Esercizio 3.67 (Es 1 del 21/7/97)**.** *Sia (X, Y) una coppia di v.c. discrete con funzione di probabilità definita nel modo seguente: $p(1,1) = p(1,2) = p(2,2) = \frac{1}{3}$.*

a) Determinare le funzioni di ripartizione congiunta, $F(x, y)$ e marginali $F_X(x)$ e $F_Y(y)$.

b) Calcolare il coefficiente di correlazione tra X e Y.

La distribuzione di probabilità congiunta del vettore (X, Y) è riportata nella seguente tabella:

X \ Y	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{1}{3}$

a) La funzione di ripartizione congiunta (provare a fare un grafico) risulta:

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 1 \wedge y < 1 \\ \frac{1}{3} & x \geq 1 \vee 1 \leq y < 2 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \vee y \geq 2 \\ 1 & x \geq 2 \vee y \geq 2 \end{cases}$$

Dalla tabella della funzione di probabilità ricaviamo le funzioni di ripartizione marginali:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

b) dobbiamo calcolare

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(X)}}$$

ricordando che $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Facendo i conti si ottiene: $EX = \frac{4}{3}$, $EY = \frac{5}{3}$, $EXY = \frac{7}{3}$ (la definizione di momento misto di ordine uno è riportata in appendice, formula (A.1)), $\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{9}$ e $\mathrm{Var}(Y) = \frac{2}{9}$. Da cui $\rho(X,Y) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.68 (Es 1 del 20/9/93). *Una macchina composta da due componenti A e B cessa di funzionare se uno dei due componenti si rompe. I tempi di durata T_A e T_B delle componenti A e B sono variabili casuali indipendenti in probabilità di tipo esponenziale e di parametri rispettivamente λ_A e λ_B. Sia T_M la variabile casuale "tempo di durata della macchina M. Si determinino:*

a) la funzione di densità di probabilità della variabile casuale T_M, il suo valore atteso e la varianza;

b) la probabilità P_A che la macchina M cessi di funzionare a causa della rottura del componente A;

c) i valori di λ_A e λ_B in modo che sia $P_A = 0.25$ ed $\mathbf{E}(T_M) = 1$;

d) se λ_A e λ_B hanno i valori di cui al punto c), qual è la probabilità che su 100 macchine del tipo M che funzionano indipendentemente l'una dall'altra, più del 75% si guasti per effetto della rottura del componente B;

e) se λ_A e λ_B hanno i valori di cui al punto c), e se si utilizzano in successione macchine del tipo M fino ad osservare 5 guasti dovuti al componente A, qual è il valore atteso del numero aleatorio N di macchine da utilizzare? Qual è la varianza di N?

a) La variabile casuale T_M è definita come:

$$T_M = \min \{T_A, T_b\}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_M \leq t) &= 1 - \mathbf{P}(T_M > t) = 1 - \mathbf{P}(T_A > t, T_B > t)\\ &= 1 - \mathbf{P}(T_A > t) \cdot \mathbf{P}(T_B > t) = 1 - e^{-\lambda_A t} e^{-\lambda_B t}\\ &= 1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t},\end{aligned}$$

che è la funzione di ripartizione retrocumulata della variabile Esponenziale di parametro $\lambda_A + \lambda_B$, come del resto si verifica direttamente derivando rispetto a t. Si ha allora

$$\mathbf{E}(T_M) = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} \quad \mathrm{Var}(T_M) = \frac{1}{(\lambda_A + \lambda_B)^2}.$$

b) La macchina M cessa di funzionare a causa della rottura del componente A se si rompe prima il componente A. La probabilità richiesta è dunque:

$$P_A = \mathbf{P}(T_A < T_B) = \mathbf{P}(T_A - T_B < 0) = \int_0^{+\infty} \int_x^0 \lambda_B e^{-\lambda_B x} \lambda_A e^{-\lambda_A y} dy dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_x^0 e^{-\lambda_B x} (1 - e^{-\lambda_A x} dx = 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

c) Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = 0.25 \\ \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} = 1 \end{cases}$$

che risolto ha come soluzione: $\lambda_A = 0.25$ e $\lambda_B = 0.75$.
d) Indichiamo con X la variabile *numero di guasti dovuti alla rottura del componente B su 100*. Si tratta di una variabile casuale Binomiale di parametri $n = 100$ e $p = P_B = 1 - P_A = 0.75$, dove abbiamo indicato con P_B la probabilità che la macchina M si guasti a causa della rottura del

componente B. P_B è il complemento ad uno di P_A poiché la macchina M cessa di funzionare a causa della rottura del componente B se tale componente si rompe prima del componente A: $P_B = \mathbf{P}(T_B < T_A) = 1 - \mathbf{P}(T_A < T_B)$. La probabilità richiesta è data da:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > 75) &= 1 - \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 0.75^k 0.25^{100-k} \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(Z > \frac{75-75}{\sqrt{100 \cdot 0.75 \cdot 0.25}}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

dove, per calcolare la probabilità richiesta, abbiamo utilizzato l'approssimazione di una variabile Binomiale standardizzata con una normale standardizzata Z.

e) La variabile N conta il numero di macchine da utilizzare fino a quando non si sono ottenuti 5 guasti dovuti alla rottura del componente A. Si tratta di una variabile casuale Binomiale Negativa di parametri $r = 5$ e $p = P_A = 0.25$. Sappiamo che $\mathbf{E}(N) = \frac{r}{p} = \frac{5}{0.25} = 20$ e $\mathrm{Var}(N) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{5 \cdot 0.75}{0.25^2} = 60$.

Esercizio 3.69 (Es 2 del 12/1/98)**.** *Si riprenda l'esercizio 3.50. Il costo globale atteso per il collaudo degli n pezzi è ritenuto troppo elevato. Pertanto si decide di collaudare m pezzi prelevati casualmente in blocco dal primo campione.*

a) Determinare la legge di probabilità della variabile casuale Y che descrive il numero di pezzi difettosi nel secondo campione.

b) Calcolare per $p = 0.08$, $n = 20$ e $m = 5$ la probabilità di ottenere più di due pezzi difettosi.

c) Calcolare il valore atteso del costo globale per il collaudo degli m pezzi prelevati.

Si ha che

$$P(Y = y | X = x) = p_{Y|X=x}(y|x) = \frac{\binom{x}{y}\binom{n-x}{m-y}}{\binom{n}{m}},$$

per $\max(0; m + x - n) \leq y \leq \min(m; x)$. Cerchiamo di capire il perché. Che si tratti di un modello ipergeometrico lo si deduce dalla descrizione dell'esperimento: dobbiamo contare i successi (per noi il successo è costituito da un pezzo difettoso) quando estraiamo in blocco m palline (i pezzi) da un'urna che ne contiene n di cui x che costituiscono il successo. Il numero dei pezzi difettosi nel secondo campionamento dipende dal numero di pezzi difettosi nel primo. Se vi sono x pezzi difettosi nel primo campione non ve ne potranno essere più di $\min(m;x)$ nel secondo. Se invece il numero di pezzi che estraiamo nel secondo campione è tale che $m > n - x$ allora in questo ci saranno almeno $m + x - n$ pezzi difettosi, quindi i pezzi difettosi devono essere più di $\max(0; m + x - n)$. Per ricavare la funzione di probabilità di Y ricavo prima la funzione di probabilità congiunta di (X, Y) e quindi la marginale di Y da quest'ultima. Abbiamo

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{Y|X=x}(y|x)p_X(x) = \frac{\binom{x}{y}\binom{n-x}{m-y}}{\binom{n}{m}}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

con $0 \leq x \leq n$ e $\max(0; m + x - n) \leq y \leq \min(m;x)$, dove $p_X(x)$ è la legge di probabilità della v.c. X. Per ricavare la legge di probabilità marginale di Y osserviamo che si ha $y \leq x \leq y + n - m$ e quindi

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= \sum_{x=y}^{y+n-m}\binom{m}{y}\binom{n-m}{x-y}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{k=0}^{n-m}\binom{m}{y}\binom{n-m}{k}p^{k+y}(1-p)^{n-k-y} \\
&= \binom{m}{y}p^y(1-p)^{m-y}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}p^k(1-p)^{n-m-k} \\
&= \binom{m}{y}p^y(1-p)^{m-y},
\end{aligned}$$

con $0 \leq y \leq m$, da cui ricaviamo che Y è una variabile casuale binomiale.
b) Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}
P(Y > 2) &= \sum_{k=3}^{5}\binom{5}{y}(0.08)^y(1-0.08)^{5-y} \\
&= 0.0045.
\end{aligned}$$

c) In questo caso abbiamo $E(C) = m(0.5 + 2p) = 3.3$.

Esercizio 3.70 (Es 2 del 22/6/99). *Con riferimento all'Esercizio 3.4, indichiamo con X e Y le variabili casuali che descrivono il numero che contrassegna il pezzo estratto rispettivamente alla prima e alla seconda estrazione. Si deduca se le due variabili casuali sono indipendenti o meno.*

Le variabili X e Y possono assumere i valori $1, 2, \ldots, n$. Dall'Esercizio 3.4, abbiamo che per $i \neq 1$ e per ogni j

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$$

Mentre

$$\mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n}\right)^2$$

L'unico valore per cui le due quantità sono uguali è $n = 1$. Le variabili X e Y quindi non sono indipendenti.

Appendice A

Formulario

Il momento misto di EXY di due variabili aleatorie discrete X e Y aventi distribuzione di probabilità $p(x_i, y_j)$ è definito come

$$EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p(x_i, y_j). \tag{A.1}$$

Se $0 < p < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n = \frac{1}{1-p}. \tag{A.2}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p^n = \frac{p}{1-p}. \tag{A.3}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n} \tag{A.4}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{A.5}$$

Se X è una v.a. Gamma di parametri λ e r, la funzione di ripartizione è data da

$$F_T(t) = 1 - \sum_{j=1}^{r} \frac{e^{\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}. \tag{A.6}$$

Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indipendenti e identicamente distribuite come X. Indichiamo con F_X e con f_X rispettivamente la funzione di ripartizione e la densità della v.a. X. Allora la funzione di densità delle variabili $U = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $V = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ è data rispettivamente da

$$f_U(u) = n\,(1 - F_X(u))^{n-1}\, f_X(u), \tag{A.7}$$

e

$$f_V(v) = n\,(F_X(v))^{n-1}\, f_X(v). \tag{A.8}$$

La funzione Γ è definita nel seguente modo

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lambda^\alpha z^{\alpha-1} e^{-\lambda z} dz. \tag{A.9}$$

La somma dei primi n numeri interi è data da

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{A.10}$$

Bibliografia

[1] Baldi, P., *Calcolo delle Probabilità e Statistica*, McGraw Hill Italia, Milano, 1992.

[2] Billingsley, P., *Probability and Measure*, Wiley, New York, 1986.

[3] Cifarelli, D.M., *Introduzone al Calcolo delle Probabilità*, McGraw Hill Italia, Milano, 1998.

[4] Maravalle, M., *et al.*, *Esercizi di statistica Svolti dal Manuale di Mood, A.M. Graybill, F.A. Boes,*, McGraw Hill Italia, Milano, 1996.

[5] Mood, A.M. Graybill, F.A. Boes, D.C. *Introduzione alla Statistica*, McGraw Hill Italia, Milano, 1988.