I METODI STATISTICI si occupano di:

- raccolta dei dati

- presentazione dei dati

- analisi dei dati

- impiego dei dati per prendere decisioni tecniche e gestionali e risolvere problemi concernenti il disegno e la progettazione di prodotti e processi

- impiego dei dati a fini previsivi e conoscitivi

IL PRIMO SCOPO DELL' ANALISI STATISTICA E' LA COMPRENSIONE DELLE CAUSE DELLA

VARIABILITA'

LEGGE DI MURPHY: anche sotto le condizioni più rigorosamente controllate un sistema si comporta come gli pare e piace

LEGGE BERGAMASCA: non tutte le ciambelle escono con il buco

ANALISI DEI

FENOMENI RIPETIBILI CON RISULTATO INCERTO

- CALCOLO DELLE PROBABILITA': modellizzazione della incertezza dei risultati

  probabilità come misura della incertezza

- STATISTICA: analisi dei dati sperimentali -valutazione della congruenza tra dati sperimentali e modello probabilistico-utilizzo di modelli probabilistici a fini conoscitivi, decisionali e previsionali.

esempio di problema calcolo probabilità:una macchina produce in media un pezzo difettoso ogni mille (probabilità di pezzo difettoso=0.001). Qual'è la probabilità che su 1000000 pezzi prodotti nessuno sia difettoso?

esempio di problema statistico: su 100 pezzi controllati due sono risultati difettosi. Questo dato sperimentale è compatibile con la specifica tecnica che la macchina in media deve produrre non più di un pezzo difettoso ogni mille

CALCOLO PROBABILITA'

ESPERIMENTO CASUALE

Definizione: Un esperimento che da luogo a differenti **risultati** se ripetuto più volte sotto le stesse condizioni verrà chiamato: **esperimento casuale.**

Definizione: L'insieme di tutti i possibili risultati, chiamati anche **eventi elementari,** di un esperimento casuale è chiamato **spazio campionario** o **spazio degli eventi** e viene indicato con

$$\Omega$$

Definizione: Un evento è un sottoinsieme di Ω.

Definizione: Due eventi A, B sono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$. Inoltre l'evento $\bar{A}$ è detto complementare di A se $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Agli eventi si applicano le operazioni insiemistiche $\cup, \cap$ e la relazione insiemistica di inclusione $\subset$ ($\subseteq$).

Definizione: Una famiglia *F*d i sottoinsiemi di Ω è detta **famiglia di eventi** o $\sigma-$ *algebra*)

se:

- $\Omega \in$ *F*

- $A \in$ *F* $\Rightarrow \bar{A} \in$ *F*

- per ogni successione $A_i, i = 1, 2, 3, ...$di insiemi appartenenti a *F* si ha che $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in$ *F*

PROBABILITA' E MISURA DI PROBABILITA'

Un evento A si verifica o no in una replica dell'esperimento casuale se si verifica oppure no un risultato elementare $e \in A$.

Il realizzarsi di $e \in A$ è frutto del caso cioè di meccanismi non deterministici e non può essere previsto con certezza.

Replicando n volte l'esperimento notiamo che alle volte A si verifica e alle volte no (quindi si verifica $\bar{A}$). Sia $n(A)$ il numero di volte che si verifica A nelle n prove.

Definizione: Il rapporto $\frac{n(A)}{n}$ è chiamato frequenza relativa di A.

LEGGE EMPIRICA DEL CASO

Al crescere del numero di prove n la frequenza relativa $\frac{n(A)}{n}$ tende a stabilizzarsi intorno ad un valore $p(A)$ chiamato probabilità dell'evento A.

Commenti:

- P(A)=0.10 quindi significa che nel lungo periodo A si presenta mediamente una volta ogni dieci.

- La probabilità è una astrazione matematica del concetto empirico di frequenza relativa

- La probabilità è una quantificazione di quanto sia verosimile attendersi un risultato da un certo esperimento (poco plausibile=poco frequente o raro).

Pensate al vostro chirurgo che vi dice che l'operazione che state per fare produce un decesso ogni 1000000 di interventi.

MISURA DI PROBABILITA' e SPAZIO DI PROBABILITA'

DEFINIZIONE Una misura di Probabilità $P(\cdot)$ è una funzione che ad ogni evento A di una famiglia di eventi F assegna un numero $P(A)$ chiamato probabilità dell'evento A che gode delle tre proprietà (chiamate assiomi del calcolo delle probabilità):

- Non negatività: $P(A) \geq 0$

- Normalizzazione: $P(\Omega) = 1$

- Additività numerabile: per ogni successione $A_i, i = 1, 2, 3, ...$di eventi disgiunti si ha:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

CONSEGUENZE

- Monotonia: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

- Probabilità Unione di due eventi e teorema di inclusione esclusione (vedi esercitazioni): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- Probabilità evento complementare

  $P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$ e quindi che $P(\emptyset) = 0$.

DEFINIZIONE La tripletta $(\Omega, F, P(\cdot))$ è detta spazio di probabilità o modello probabilistico

ESEMPIO FONDAMENTALE:

Se $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ e se

$p_i = P(\{e_i\}) = \frac{1}{k}$ si ha il **modello di equiprobabilità classico.** Per questo modello la probabilità di un evento $A \subset \Omega$ di cardinalità k_A è $P(A) = \frac{k_A}{k}$ (regola classica nota come rapporto tra numero eventi elementari favorevoli e numero eventi elementari possibili).

COMMENTO: Questo modello per quanto banale è utilissimo e stà alla base delle applicazioni del calcolo combinatorio al calcolo delle probabilità

CAMPIONAMENTO

L'esperimento casuale che consiste nell'estrarre a caso n unità da un insieme di N unità è chiamato Campionamento.

L'insieme delle n unità estratte è chiamato campione ed è un evento elementare di questo esperimento.

Se ogni campione ha la stessa probabilità si parla di campionamento casuale equiprobabile

I tipi di campionamento si distinguono a seconda se le unità sono estratte (campionate) con o senza riposizione e a seconda che l'ordine di estrazione sia o non sia rilevante.

TABELLA RILEVANTE TIPI CAMPIONI

	ORDINATI	NON ORDINATI
CON RIP.	N^n	$\binom{N-1+n}{n}$
SENZA RIP.	$(N)_n$	$\binom{N}{n}$

Nel caso di equiprobabilità ad ogni campione è assegnata una probabilità data dal reciproco del numero riportato nella tabella precedente

Esercizi:

- probabilità di inclusione (probabilità che una unità sia campionata ovvero inclusa nel campione)

- probabilità di ripetizione (probabilità che una unità compaia k volte in un campione k$>$ 1).Solo per i campioni con riposizione.

ESEMPIO N=3, n=2

	ORDINATI	NON ORDINATI
CON RIP.	a a a b a c b a b b b c c a c b c c	a a a b a c b b b c c c
SENZA RIP.	a b a c b a b c c a c b	a b a c b c

ESERCIZI RICONDUCIBILI AI QUATTRO TIPI DI CAMPIONAMENTO

ES.1.1 (camp. ORD. con R.): Ogni giorno su n=5 gg. lavorativi un autoveicolo è scelto a caso da un parco di N=3 autoveicoli V1 V2 e V3. Nell'ipotesi di equiprobabilità calcolare le probabilità dei seguenti eventi:

A: V1 è utilizzato solo Lunedì e Martedì

B: V1 è utilizzato due volte

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{2^3}{3^5} = 0.0329 \\
P(B) &= \binom{5}{2}\frac{2^3}{3^5} = 0.3292
\end{aligned}
$$

ES. 1.2 (camp. ordinati S.R.) Un caccia ha quattro missili numeratida uno a quattro. Vengono lanciati tre missili in successione. Nell'ipotesi di equiprobabilità calcolare le probabilità dei seguenti eventi:

A Il missile n.1 è lanciato per primo

B Il missile n.1 è lanciato per ultimo

C. Il missile n.1 viene utilizzato

Se i missili sono lanciati simultaneamente calcolare la robabilità (non ordinato senza riposizione):

D Il missile n.1 è tra quelli lanciati

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{(3)_2}{(4)_3} = \frac{1}{4} \\
P(B) &= \frac{(3)_2}{(4)_3} = \frac{1}{4} \\
P(C) &= 3\frac{1}{4} \\
P(D) &= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = 3\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

ES 1.3. (campioni non ordinati con Rip.) Un numero n=5 di cacciaviti è spedito in omaggio a N=3 clienti C1, C2, C3. Nell'ipotesi di equiprobabilità calcolare le probabilità dei seguenti eventi:

A: C1 riceve tre cacciaviti

B: Ogni cliente riceve almeno un cacciavite

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{\binom{2-1+2}{2}}{\binom{3-1+5}{5}} = 0.1428 \\
P(B) &= \frac{\binom{3-1+2}{2}}{\binom{3-1+5}{5}} = 0.2857
\end{aligned}
$$

ES. 1.4 (Ordinati S.R.) Tre di quattro studenti A, B, C, D vengono interrogati uno dopo l'altro. Nell'ipotesi di equiprobabilità calcolare le probabilità dei seguenti eventi:

E1: A è interrogato per primo e B per secondo.

E2: A e B sono interrogati in ordine alfabetico

E3: A e B sono interrogati

$$\begin{aligned} P(E1) &= \frac{(4-2)_{3-2}}{(4)_3} = \frac{1}{12} \\ P(E2) &= \binom{3}{2}\frac{1}{12} = 3\frac{1}{12} \\ P(E3) &= (3)_2\frac{1}{12} = 6\frac{1}{12} \end{aligned}$$

PROBABILITA' CONDIZIONATE

SPESSO UN EVENTO A E' PIU O MENO VEROSIMILE A SECONDA SE PRECEDENTEMENTE SI E' O NON SI E VERIFICATO UN EVENTO B.

Ad esempio se l'evento A è una conseguenza logica di B (nel senso che se si verifica B allora necessariamente si verifica A) allora la probabilità di A dato che si è verificato B deve essere uno mentre la probabilità di A dato che si è verificato $\bar{B}$ non è necessariamente ne zero ne uno.

Ad esempio dato che si estraggono solo carti di cuori (evento B) la probabilità di estrarre una carta di seme rosso (evento A) deve essere uno. Invece se si estraggono carte non di cuori (evento $\bar{\text{B}}$) la probabilità di una carta di seme rosso nell'ipotesi di equiprobabilità è $\frac{10}{30}$.

Un esempio meno estremo è quello di un sistema di controllo di qualità che può scartare un pezzo (evento A) sia che questo sia effettivamente difettoso (B) sia che questo sia conforme ($\bar{B}$). Se la procedura di controllo è accettabile la probabilità di A dato B (scarto corretto) deve essere prossima ad uno e quella di A dato $\bar{B}$ (scarto errato) deve essere piccola.

Le problematiche precedenti giustificano la seguente definizione di probabilità condizionata

PROBABILITA' CONDIZIONATA

Definizione Dati due eventi A e B chiamati evento condizionato e evento condizionante si definisce probabilità condizionata di A dato B il seguente rapporto:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Perchè la definizione abbia senso deve essere $P(B) > 0$.

E' istruttivo osservare che se $B \subseteq A$, $P(A|B) = 1$ e in particolare che $P(B|B) = 1$. Invece se $A \subseteq B$, $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$. Inoltre vale che se $A \cap B = \emptyset, \quad P(A|B) = 0$.

Il concetto di probabilità condizionata assolve alle esigenze presentate dai casi in cui informazioni presperimentali permettono di sapere se B si è verificato o no e quando alla luce di queste informazioni si deve valutare l'incertezza connessa al verificarsi di altri eventi.

PRINCIPIO PROBABILITA' COMPOSTE

non è che una riespressione della precedente definizione:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

in generale:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...$$

PRINCIPIO DELLE PROBABILITA' TOTALI

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

dimostrazione ovvia????!!!!!!

Il seguente teorema pur nella sua semplicità ha un ruolo enorme nel calcolo delle probabilità e in statistica e la sua rilevanza non è mai sufficientemente apprezzata.

TEOREMA DI BAYES

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

esempio: una macchina produce pezzi difettosi (evento B) con probabilità P(B)= 0.001. Una procedura di controllo scarta pezzi difettosi (evento A condizionato da B) con probabilità $P(A \mid B) = 0.9$ mentre scarta pezzi non difettosi con probabilità $P(A \mid \bar{B}) = 0.01$.

Qual'è la probabilità $P(B|A)$ che un pezzo sia non difettoso dato che è stato scartato?

risp.

$$\begin{aligned} P(\bar{B}|A) &= \frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})} = \\ &= \frac{0.999 * 0.01}{0.999 * 0.01 + 0.001 * 0.9} = 0.9174 \end{aligned}$$

Se si vuole che $P(\bar{B}|A) = 0.01$ a quanto deve essere portata $P(A|B)$

INDIPENDENZA IN PROBABILITA'

DEFINIZIONE se $P(A|B) = P(A)$ ovvero se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ gli eventi A e B son **indipendenti in probabilità**

per la generalizzazione a più eventi vedi Negri.

Si noti che:

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(A)$$