STIMA MEDIANTE INTERVALLI

Se θ è un parametro e $U > L$ sono due statistiche tali che:

$$P\left[(L < \theta) \cap (U > \theta)\right] = 1 - \alpha$$

per ogni valore di θ si dice L **sottostima** θ **e** U **sovrastima** θ con probabilità $1 - \alpha$.

Si può anche scrivere:

$$P(L < \theta < U) = 1 - \alpha$$

e dire che (L, U) è un intervallo di confidenza per θ.

La probabilità $1 - \alpha$ è chiamata **livello di confidenza.**

L'interpretazione frequentista del livello di confidenza e che nel lungo periodo lo strumento casuale $(L \quad U)$ fornisce realizzazioni sperimentali o campionarie $(l \quad u)$ che contengono l'incognito parametro con frequenza $1 - \alpha$, mentre nel lungo periodo la frequenza di intervalli campionari $(l \quad u)$ che non contengono l'incognito parametro è α.

L'aspetto tecnicamente non banale è trovare le statistiche L, U in modo che l'intervallo $(L \quad U)$ abbia **probabilità** $1-\alpha$ **di contenere l'incognito valore del parametro qualunque esso sia.**

UNA SOLUZIONE: LE VARIABILI CASUALI PIVOTALI

La variabile casuale $T(\theta) = T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ è detta pivotale per θ se è

- funzione delle variabili casuali campionarie e del parametro

- fissata una realizzazione campionaria è funzione monotona di θ

- ha funzione di ripartizione che non dipende da θ o da altri parametri incogniti.

L'ultima proprietà consente di determinare due valori t_1 e t_2 tali che :

$$P(t_1 < T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) < t_2) = 1 - \alpha$$

per ogni valore di θ.

Ad esempio risolvendo le equqzioni:

$$F(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$
$$F(t_2) = \frac{\alpha}{2}$$

ovvero usando i percentili:

$$t_2 = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$t_1 = t_{\frac{\alpha}{2}}$$

INTERVALLO DI CONFIDENZA COSTRUITO A PARTIRE DA UNA VARIABILE CASUALE PIVOTALE

Se $t = T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ è monotona crescente in θ con inversa $T^{-1}(X_1, X_2, ..., X_n, t)$ si ha che

$$P(t_1 < T(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) < t_2) = 1 - \alpha$$

è equivalente ad

$$P\left[T^{-1}(X_1, X_2, ..., X_n, t_1) < \theta < T^{-1}(X_1, X_2, ..., X_n, t_2)\right] = 1 - \alpha$$

che è un intervallo di confidenza per θ.

Operativamente si procede così:

- si calcolano le realizzazioni campionarie $l = T^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n, t_1)$

  e $u = T^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n, t_2)$ degli estremi dell'intervallo

- si conclude affermando che l'incognito parametro ha un valore in $(l \quad u)$.

Si ha così una risposta da uno strumento che nel lungo periodo fornisce risposte errate con frequenza α.

PRIMO ESEMPIO: INTERVALLO DI CONFIDENZA PER IL PARAMETRO μ DI UN MODELLO DI GAUSS

La variabile casuale media campionaria standardizzata di Student:

$$T = \frac{M_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}\sqrt{n}$$

è funzione monotona di μ ed ha una funzione di ripartizione Tdi student con n-1 gradi di libertà. Quindi è pivotale.

Se $t_{1-\frac{\alpha}{2}}, t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sono lo $1-\frac{\alpha}{2}$ percentile e lo $\frac{\alpha}{2}$ percentile di una Tdi student con n-1 g.d.l. allora:

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{M_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}\sqrt{n} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

con semplici passaggi si arriva a

$$P\left(M_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} < \mu < M_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= 1-\alpha$$

Quindi $M_n \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}$ sono gli estremi dell'intervallo di confidenza cercato.

SECONDO ESEMPIO: INTERVALLO DI CONFIDENZA PER IL PARAMETRO σ^2 DI UN MODELLO DI GAUSS

La variabile casuale

$$G^2 = \frac{S_n^2}{\sigma^2}(n-1)$$

è funzione monotona di σ^2 ed è di tipo chi quadro con n-1 gradi di libertà quindi è pivotale.

Se $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}, \chi_{\frac{\alpha}{2}}$ sono lo $1-\frac{\alpha}{2}$ percentile e lo $\frac{\alpha}{2}$ percentile di una chi quadro con n-1 g.d.l. allora:

$$P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{S_n^2}{\sigma^2}(n-1) < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

da cui deriva facilmente che:

$$P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

Ovvero $\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}}$ sono gli estremi dell'intervall di confidenza cercato.

INTERVALLI DI CONFIDENZA ASINTOTICI PER UN VALORE ATTESO

Sia $[X_1, X_2, ..., X_n]$ un campione casuale dal modello statistico

$$M \equiv \{F(x;\theta) : \theta \in \Theta, x \in S\}.$$

Siano μ e σ^2 53 valore atteso e la varianza delle variabili casuali campionarie. In base al teorema del limite centrale la variabile casuale

$$T = \frac{M_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n}$$

è asintoticamente normale e come conseguenza si ha che lo è anche:

$$T = \frac{M_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}\sqrt{n}$$

Procedendo come per il caso del valore atteso di variabili casuali normali si ha che: $M_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}$ sono gli estremi dell'intervallo di confidenza cercato per il valore atteso μ. Il livello di confidenza $1-\alpha$ è detto asintotico perch` basato sull'impiego del teorema del limite centrale.

INTERVALLI DI CONFIDENZA ASINTOTICI PER Il VALORE ATTESO DI UNA VARIABILE CASUALE INDICATORE

Si consideri il caso in cui le variabili casuali campionarie siano Binomiali di parametri 1 e π. Per il teorema del limite centrale la variabile casuale

$$\frac{\bar{X}_n - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\sqrt{n}$$

è asintoticamente normale e di conseguenza lo è anche

$$\frac{\bar{X}_n - \pi}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\sqrt{n.}$$

Con passaggi analoghi a quelli degli esempi precedenti si ottengono i seguenti estremi dell' intervallo di confidenza con livello asintotico $1-\alpha$ per il parametro π.

$$\bar{X}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}.$$

VERIFICA DI IPOTESI STATISTICHE

Sia $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ un campione casuale dal modello $\{F(x, \theta, x \in S, \theta \in \Theta\}$. Una ipotesi statistica è una **affermazione su** θ e un test statistico è una regola per decidere sulla **compatibilità dei dati con la precedente affermazione**.

Definizione di sistema di ipotesi semplici

$$\begin{cases} H_0 & \theta = \theta_0 \\ H_A & \theta = \theta_A \end{cases}$$

H_0 è chiamata ipotesi nulla ed è l'affermazione sul parametro sottoposta a verifica alla luce dei dati campionari (sperimentali)

H_A è detta ipotesi alternativa e viene utilizzata per formalizzare la idea di dati sperimentali che non supportano l'ipotesi nulla.

L'ipotesi alternativa $H_A \quad \theta > \theta_0$ è detta unilaterale destra

L'ipotesi alternativa $H_A \quad \theta < \theta_0$ è detta unilaterale sinistra.

L'ipotesi alternativa $H_A \quad \theta \neq \theta_0$ è detta bilaterale.

A parità di ipotesi nulla diverse ipotesi alternative producono diversi modi di utilizzare i dati sperimentali per verificare la ipotesi nulla.

Se l'ipotesi nulla non assegna un valore a tutti i parametri non è semplice

Un test statistico è come un sistema d' allarme che suona in presenza di dati non compatibili con la ipotesi nulla.

Come tutti i sistemi di allarme il test statistico può produrre falsi allarmi o dar luogo a mancati allarmi.

LA STRUTTURA DI UN TEST STATISTICO

- **Un sistema di ipotesi**

- Una statistica T chiamata **statistica test**

- Una partizione $S = A \cup R$ dell'insieme S dei possibili valori sperimentali di T in due zone chiamate di **A**ccettazione (A) e di **R**ifiuto (R).

- **La regola:** se il valore sperimentale t di T appartiene ad A si conclude che l'ipotesi nulla può essere mantenuta, se t appartiene ad R si rifiuta l'ipotesi nulla perchè non compatibile con i campionari.

ERRORE DI PRIMO TIPO (falso allarme)

Se i dati portano a rifiutare una ipotesi nulla che è vera si commette un errore di primo tipo.

La probabilità di questo errore

$$\alpha = P(T \in R|\theta_0)$$

è chiamata livello di significatività del test.

Se l'ipotesi nulla non è semplice il livello di significatività è il max di $P(T \in R|\theta_0)$ rispetto i parametri ai quali l'ipotesi nulla non assegna un valore.

Si deve segliere R in modo da garantire un preassegnato livello di significatività e in modo da minimizzare la probabilità del seguente errore.

ERRORE DI SECONDO TIPO
(mancato allarme)

Se i dati portano ad accetare una ipotesi nulla che è falsa si commette un errore di secondo tipo.

La probabilità di questo errore

$$\beta_A = P(T \in A|\theta_A)$$

è chiamata probabilità dell'errore di tipo II. Si deve segliere R in modo da garantire un pre-assegnato livello di significatività e in modo da minimizzare la probabilità β o in modo da massimizzare

$$\pi_A = 1 - \beta_A = P(T \in R|\theta_A)$$

Questa ultima probabilità è chiamata potenza del test rispetto l'alternativa $\theta = \theta_A$.

Errori di primo e secondo tipo e loro probabilità

Realtà⇒ Decisione⇓	H_0 vera	H_0 falsa
Mantengo H_0	Ok (1-α)	tipo II (β)
Rifiuto H_0	tipo I (α)	Ok (1-$\beta = \pi$)

FUNZIONE DI POTENZA

La funzione $p(\theta) = P(T \in R|\theta)$ di θ è chiamata funzione di potenza del test ($p(\theta_0) = \alpha, p(\theta_A) = \pi_A$.) Affinchè un test sia ragionevole deve essere che: $\pi_A > \alpha$ se la ipotesi alternativa è semplice.

Se l'alternativa è unilaterale a destra deve essere $p(\theta) > \alpha$ per $\theta > \theta_0$.

Se l'alternativa è unilaterale a sinistra deve essere $p(\theta) > \alpha$ per $\theta < \theta_0$.

Se l'alternativa è bilaterale deve essere $p(\theta) > \alpha$ per $\theta \neq \theta_0$.

LE VARIABILI CASUALI PIVOTALI UTILIZZATE IN PRECEDENZA con i parametri da cui dependono fissati ai valori specificati da H_0 **SONO ANCHE USATE COME STATISTICHE TEST**. In ogni caso regione di rifiuto e regione di accettazione sono da determinare in base al tipo di alternativa e al livello di significatività prescelto. Come si vedrà negli esempi.

PRIMO ESEMPIO: VEIFICA DI IPOTESI PER IL PARAMETRO μ DI UN MODELLO DI GAUSS

La variabile casuale media campionaria standardizzata di Student:

$$T = \frac{M_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} \sqrt{n}$$

che ha una funzione di ripartizione T di student con n-1 gradi di libertà è la Statistica Test.

Se il sistema di ipotesi con alternativa unilaterale destra:

$$\begin{cases} H_0 & \mu = \mu_0 \\ H_A & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

si rifiuta con livello di significativitá α se

$$T > t_{1-\alpha}$$

$t_{1-\alpha}$ è chiamato valore critico del test.

Se il sistema di ipotesi con alternativa unilaterale sinistra:

$$\begin{cases} H_0 & \mu = \mu_0 \\ H_A & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

si rifiuta con livello di significativitá α se

$$T < t_\alpha$$

Se il sistema di ipotesi è con alternativa bilaterale:

$$\begin{cases} H_0 & \mu = \mu_0 \\ H_A & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

si rifiuta con livello di significativitá α se T è esterno all'intervallo di accettazione avente estremi :

$$t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

FUNZIONE DI POTENZA (varianza nota

TEST UNILATERALE A DESTRA

$$\pi(\mu_A) = P(\frac{M_n - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n} \geq z_{1-\alpha}|H_A) =$$

$$= 1 - \Phi(z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n})$$

TEST UNILATERALE A SINISTRA

$$\pi(\mu_A) = P(\frac{M_n - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n} \leq -z_{1-\alpha}|H_A) =$$

$$= \Phi(-z_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n})$$

TEST BILATERALE

$$\pi(\mu_A) = \Phi(-z_{1-\frac{1}{2}\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n}) +$$

$$+ 1 - \Phi(z_{1-\frac{1}{2}\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n})$$

FUNZIONE DI POTENZA (varianza non nota

Le potenze vanno calcolate utilizzando la T di student non centrale con n-1 gdl e parametro di non centralità

$$\lambda_A = \frac{\mu_A - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n}$$

comando MATLAB per la funzione di rip.:

$$nctcdf(t, gdl, \lambda_A)$$

esempio alternativa a sinistra:

$$\pi(\mu_A) = P(\frac{M_n - \mu_0}{\sqrt{S^2}}\sqrt{n} \leq -t_{1-\alpha}|H_A) =$$

$$= F_{tnc}(-t_{1-\alpha}; \frac{\mu_A - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n})$$

esempio alternativa a destra

$$\pi(\mu_A) = P(\frac{M_n - \mu_0}{\sqrt{S^2}}\sqrt{n} \geq t_{1-\alpha}|H_A) =$$

$$= 1 - F_{tnc}(t_{1-\alpha}; \frac{\mu_A - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n})$$

SECONDO ESEMPIO:VERIFICA DI IPOTESI PER IL PARAMETRO σ^2 DI UN MODELLO DI GAUSS

La variabile casuale

$$G^2 = \frac{S_n^2}{\sigma_0^2}(n-1)$$

di tipo chi quadro con n-1 gradi di libertà è la statistica Test.

Sia α il livello di significatività.

Se il sistema di ipotesi è con alternativa unilaterale a sinistra si rifiuta se $G^2 < \chi_\alpha$

Se il sistema di ipotesi è con alternativa unilaterale a destra si rifiuta se $G^2 > \chi_{1-\alpha}$

Se il sistema di ipotesi è con alternativa bilaterale si rifiuta se G^2 è esterno all'intervallo di accettazione avente estremi:

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}, \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

TEST confronto valori attesi

Sia $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ un campione casuale dal modello statistico normale di parametri $\mu(X)$ e σ^2. Sia $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$ un campione casuale dal modello statistico normale di parametri $\mu(Y)$ e σ^2. Sia

$$H_0 : \mu(X) = \mu(Y)$$

L'alternativa pu essere unilaterale o bilaterale.

La statistica test

$$\frac{(M_X - M_Y) - (\mu(X) - \mu(Y))}{\sqrt{\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}(n^{-1} + m^{-1})}}$$

una T di Student con $n + m - 2$ gdl che viene usata in modo ovvio.

TEST ASINTOTICI PER UN VALORE ATTESO

Sia $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ un campione casuale dal modello statistico

$$M \equiv \{F(x;\theta) : \theta \in \Theta, x \in S\}.$$

Siano μ e σ^2 il valore atteso e la varianza delle variabili casuali campionarie. In base al teorema del limite centrale la variabile casuale

$$Z = \frac{M_n - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\sqrt{n}$$

è asintoticamente normale e come conseguenza si ha che lo è anche:

$$T = \frac{M_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}\sqrt{n}$$

La variabile casuale Z pu essere utilizzata per verificare ipotesi inerenti un valore atteso per numerosità campionarie elevate rifiutando per valori elevati o piccoli o esterni ad un intervallo a seconda della natura della ipotesi alternativa in modo analogo a quello descritto per il valore atteso di una normale. Ad esempio se l'alternativa è bilaterale

$$\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

sono gli estremi dell'intervallo di accettazione.

Si applichi il precedente risultato al problema della verifica di ipotesi sul parametro π di una Binomiale e sul parametro λ di una Poisson.