Lezione 2 – **Ancora sugli insiemi numerici**

L'insieme dei numeri complessi (Programma avanzato)

2.1 Un problema impossibile

Un commerciante vuole importare dall'Australia un articolo il cui prezzo unitario di acquisto alla fonte è 40 euro, non conosce il prezzo di trasporto sa però che è molto elevato in rapporto al valore dell'articolo e che il costo di trasporto è inversamente proporzionale alla quantità. Il commerciate ha un budget di 100 euro quindi chiede al suo commercialista di dirgli quante unità di questo articolo può ordinare.
Il commercialista gli fa notare che non è detto che sia sempre possibile determinare la quantità, dipende dal costo unitario del trasporto.
Il commerciante, non capisce il ragionamento, chiede una prova matematica.

2.1 L'unità immaginaria

È chiaro che l'insieme dei reali non è chiuso rispetto a tutte le operazioni definite sui reali, in particolare rispetto all'estrazione della radice quadrata. Infatti la radice di un numero negativo non è definita in R; per dare un significato a questa operazione occorre introdurre una nuova grandezza chiamata unità immaginaria.

Definizione 2.1
Si chiama unità immaginaria e si indica con i la grandezza per cui vale $i^2 = -1$.

Esempio 2.1
Calcoliamo le potenze crescenti di i:

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i \cdot i^2 = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

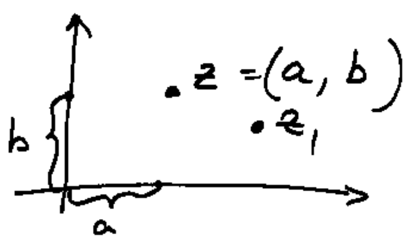
…

Dopo un po' comincia ad essere evidente che l'elevamento a potenza dell'unità immaginaria è una funzione periodica di periodo 4, ossia può essere scritto che $i^{n+4k} = i^n \quad n < 4,\ k \in N$; e ciò rappresenta un vantaggio nei calcoli quando l'esponente di i è particolarmente elevato:
$i^{151} = i^{148+3} = i^3 = -i$

2.2 Il concetto di numero complesso

L'insieme dei numeri complessi si indica con C e si può considerare un'estensione di quello dei reali; ogni numero complesso è scritto nella forma $z = a + bi$, in cui si distinguono una parte reale (a) ed una immaginaria (b). Ogni numero complesso è definito quindi da una coppia ordinata di reali (a, b) ed è utile rappresentare i numeri complessi in un sistema di assi ortogonali (detto anche **piano di Gauss**) in cui l'ascissa rappresenta la parte reale del numero complesso indicata con $\mathrm{Re}(z) = a$, e l'ordinata rappresenta la parte immaginaria $\mathrm{Im}(z) = b$.

Definizione 2.2
Un numero complesso z è definito come la somma algebrica di un numero reale e un numero immaginario: $z = a + bi$, dove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria ($i^2 = -1$).
$\bar{z} = a - bi$ si chiama complesso coniugato di $z = a + bi$.



Esempio 2.2
Prendiamo ad esempio il numero complesso $z = 2 + 5i$; la sua parte reale è $\mathrm{Re}(z) = 2$ e la sua parte immaginaria è $\mathrm{Im}(z) = 5$. Nel piano di Gauss questo numero viene determinato dalla coppia di coordinate (2,5) ed è quindi ben definito. Il suo coniugato è $\bar{z} = 2 - 5i$.

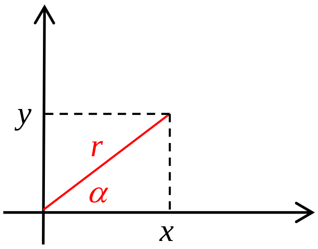
2.3 Operazioni di somma e prodotto sui numeri complessi

Queste operazioni sono trattate come semplici somme e prodotti algebrici, con l'unico accorgimento che $i^2 = -1$

$$a,b,c,d \in R$$
$$(a+bi)+(c+di) = \underbrace{(a+c)}_{coeff.reale} + \underbrace{(b+d)}_{coeff.complesso}\ i$$
$$(a+bi)(c+di) = ac + (ad+bc)i + bdi^2 = \underbrace{(ac-bd)}_{coeff.reale} + \underbrace{(ad+bc)}_{coeff.complesso} i$$

Esempio 2.3
$z_1 = 3 + 2i$, $\quad z_2 = 5 - i$
$z_1 + z_2 = (3+5) + (2-1)i = 8 + i$
$z_1 \cdot z_2 = (3+2i)(5-i) = 15 + 7i - 2i^2 = 17 + 7i$
Notiamo che, dato un numero complesso $z = a + bi$,
la somma $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a \in R$ e il prodotto $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \in R$.

Un altro modo di rappresentare un punto del piano è quello che utilizza le **coordinate polari**:



$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

dove

$r \geq 0$ (modulo o raggio) è la distanza del punto (a,b) dall'origine

α (angolo o anomalia) è l'angolo che il raggio forma con il semiasse positivo delle ascisse

Un numero complesso può quindi essere scritto anche così:

$$a + ib = r\cos\alpha + ir\sin\alpha = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Si può dimostrare che una terza rappresentazione è

$$a + ib = re^{i\alpha}$$

Osservazione
Da questa terza rappresentazioni alternativa si ricavano due uguaglianze sorprendenti:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \text{e} \quad e^{i\pi} = -1 \qquad !!!!!!!!!$$

Esempio 2.4
$z = 1 + i$ nel piano di Gauss corrisponde al punto (1,1) che in coordinate polari è $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$; infatti

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

Teorema 2.2: teorema fondamentale dell'algebra

Data un'equazione di n-esimo grado nell'incognita $z \in C \quad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$
con $a_i \in C \quad i = 1, 2, \ldots, n$
Essa ammette *n* soluzioni in *C* (ognuna contata con la propria molteplicità).

Esempio 2.5
$(x-1)^3 = 0$
$x = 1$, il grado dell'equazione è 3, ed essa ammette una soluzione con molteplicità 3
$x^2 = -2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \pm\sqrt{2}\, i$
Anche qui il grado dell'equazione è due e ci sono due soluzioni

Teorema 2.3
Data un'equazione di *n*-esimo grado nell'incognita $z \in C \quad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$

Se i suoi coefficienti a_i sono tutti reali, allora le soluzioni complesse di tale equazione si presentano sempre a coppie, ovvero se $z_1 = a + bi$ è una soluzione allora lo è anche il suo coniugato $\bar{z} = a - bi$.

Esempio 2.6
$x^3 + 1 = 0$, è un'equazione di terzo grado e perciò avrà tre soluzioni.
Ci chiediamo: quante di queste sono reali? Se fossero due, ci sarebbe solo una soluzione complessa, e per quanto detto sopra, poiché i coefficienti dell'equazione sono tutti reali, le soluzioni complesse sono in un numero pari. Di conseguenza, avendo appurato che l'unica soluzione reale è $x = -1$, le altre due sono necessariamente complesse.

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$
$$x = -1, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$
Abbiamo così verificato che le due soluzioni complesse sono coniugate.

$x^5 - 4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$
Quest'equazione può avere 1, 3 o 5 soluzioni reali, ma non 2 o 4.

File Geogebra: Polinomi.ggb

Applicazione
Il commercialista imposta un'equazione dove *Q* è la quantità incognita, *p*=40 è il prezzo unitario alla fonte, *C* è il costo fisso per il trasporto di un articolo e *R*=100 è il budget.
Si tratterebbe di trovare *Q* in modo tale che $Qp + C/Q = R$ ossia $Q^2 p - RQ + C = 0$.
Bisogna risolvere l'equazione nella variabile *Q* il cui discriminante è $R^2 - 4pC$ perciò se
$10000 - 160C > 0$ ossia C<62,5 le soluzioni sono due ma solo una di queste è accettabile;
$10000 - 160C = 0$ ossia C=62,5 l'equazione ha una soluzione;
$10000 - 160C < 0$ ossia C>62,5 le soluzioni dell'equazione sono complesse quindi non esiste una quantità che risponda alla richiesta del commerciante!

Intervalli in R (Programma Base)

Definizione 2.3

$[a,b]=\{x\in R, a\le x\le b\}$ è un intervallo **chiuso**

$(a,b)=\{x\in R, a<x<b\}$ è un intervallo **aperto**

$[a,b)=\{x\in R, a\le x<b\}$ è un intervallo **chiuso a sinistra** e **aperto a destra**

$(a,b]=\{x\in R, a<x\le b\}$ è un intervallo **chiuso a destra** e **aperto a sinistra**

$[a,+\infty)=\{x\in R, x\ge a\}$ è un intervallo **chiuso illimitato** "a destra" ossia **superiormente**

$(a,+\infty)=\{x\in R, x>a\}$ è un intervallo **aperto illimitato** "a destra" ossia **superiormente**

$(-\infty,a]=\{x\in R, x\le a\}$ è un intervallo **chiuso illimitato** "a sinistra" ossia **inferiormente**

$(-\infty,a)=\{x\in R, x<a\}$ è un intervallo **aperto illimitato** "a sinistra" ossia **inferiormente**

Esempi 2.6

[-1,2] intervallo **chiuso** e **limitato**

(-1,2) intervallo **aperto** e **limitato**

[-1,+∞) intervallo **chiuso** e **illimitato superiormente**

(-∞,-1] intervallo **chiuso** e **illimitato inferiormente**

(-1,+∞] intervallo **aperto** e **illimitato superiormente**

(-∞,-1) intervallo **aperto** e **illimitato inferiormente**

[-1,2] ∪ [3,5] non è un intervallo perché non si può scrivere in uno degli otto modi.

Insiemi limitati e illimitati in R (Programma base)

Definizione 2.4

Se $X \subset R$ (X sottoinsieme proprio di R) e $\forall x \in X$ vale $x \leq k$ per qualche $k \in R$, allora k si dice **maggiorante** dell'insieme X, e tale insieme si dirà **limitato superiormente**.

Se $X \subset R$ (X sottoinsieme proprio di R) e $\forall x \in X$ vale $x \geq h$ per qualche $h \in R$, allora h si dice **minorante** dell'insieme X, e tale insieme si dirà **limitato inferiormente**.

Un insieme $X \subset R$ si dice **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Un insieme che non ammette ne' maggiorante ne' minorante si dice **illimitato**.

Esempi 2.7

1. L'insieme $X = (-2,1)$ ammette almeno un maggiorante k ; infatti tutti i numeri $k \geq 1$ sono maggioranti. Inoltre ammette almeno un minorante h; infatti tutti i numeri $h \leq -2$ sono minoranti, Pertanto, essendo limitato sia inferiormente che superiormente, X è limitato.

2. L'insieme $X = [5,9) \cup \{10\}$ è limitato, poiché tutti i $k \geq 10$ sono maggioranti e tutti gli $h \leq 5$ sono minoranti.

3. L'insieme $X = (-\infty,3)$ e $X = (-\infty,3]$ sono insiemi limitati solo superiormente; infatti tutti i valori $k \geq 3$ sono maggioranti.

Massimo e minimo di un insieme in R (Programma base)

Definizione 2.5

Se $X \subset R,\ \exists x^* \in X:\ \forall x \in X\ \ x \leq x^*$ allora x^* si dice **massimo** dell'insieme X

$$x^* = \max_{x \in X} X$$

Se $X \subset R,\ \exists \bar{x} \in X:\ \forall x \in X\ \ x \geq \bar{x}$ allora $\bar{x}$ si dice **minimo** dell'insieme X

$$\bar{x} = \min_{x \in X} X$$

Esempio 2.8

$X = (-\infty,3]$ è limitato superiormente e ha massimo $x^* = 3$, mentre $X = (-\infty,3)$ è anch'esso limitato superiormente ma non possiede un massimo.

$X = \{x \in N,\ x = 2n+1,\ n \in N\}$ è l'insieme dei numeri dispari, esso è limitato inferiormente e illimitato superiormente, non ammette massimo ma ha minimo $\bar{x} = 1$.
E i pari? Se ammette minimo, qual è?

Estremi superiore e inferiore di un insieme in R (Programma base)

Definizione 2.6

Sia X un sottoinsieme proprio non vuoto di R, indichiamo con X^* l'insieme di tutti i maggioranti di X, il minimo di X^* si chiama estremo superiore di X e si indica con **sup*X***.
Se X possiede un massimo, questo coincide con l'estremo superiore di X.

Sia X un sottoinsieme proprio non vuoto di R, indichiamo con $\overline{X}$ l'insieme di tutti i minoranti di X, il massimo di $\overline{X}$ si chiama estremo inferiore di X e si indica con **inf*X***.
Se X possiede un minimo, questo coincide con l'estremo inferiore di X.

Per convenzione se X **non è limitato superiormente** $\sup X = +\infty$ e se X **non è limitato inferiormente** $\inf X = -\infty$.

Esempio 2.9
$X = (-\infty,3)$ **non possiede un massimo** ma possiede un estremo superiore: $X^* = [3,+\infty)$ perciò $\sup X = 3$, $\inf X = -\infty$
$X = (-\infty,3]$ **possiede un massimo** infatti $X^* = [3,+\infty)$ perciò $\sup X = \max_{x \in X} X = 3$, $\inf X = -\infty$.
$X = (-1,3)$, X è limitato ma non ha minimo, $X^0 = (-\infty,-1] \Rightarrow \inf X = -1$
$X = [2,3]$, questo insieme possiede sia un massimo che un minimo, che coincidono con l'estremo superiore e l'estremo inferiore: $\sup X = 3$, $\inf X = 2$.

Assioma 2.1 Assioma di completezza o di continuità
Ogni insieme non vuoto di reali possiede un estremo inferiore e un estremo superiore

Definizione 2.7
Due insiemi $A, B \subset R$, $A, B \neq \emptyset$ si dicono
separati, se $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha che $a \leq b$;
contigui, se $\forall \varepsilon > 0, \exists \overline{a} \in A, \exists \overline{b} \in B : \overline{b} - \overline{a} < \varepsilon$.
$c \in R$ si dice **elemento separatore** fra A e B se $\forall a \in A, \forall b \in B$ si ha $a \leq c \leq b$
Se A e B sono contigui, allora l'elemento separatore, se esiste, è unico.
Se A e B sono separati, allora esiste almeno un elemento separatore e può essere uno o più di uno.

Esempio 2.11
$A = (1,2)$, $B = (3,4)$, i due insiemi sono separati ed esistono infiniti elementi separatori: $c \in [2,3]$.
$A = (-1,0)$, $B = (0,1)$, i due insiemi sono contigui e l'elemento separatore è $c = 0$.
Gli insiemi **Q (numeri razionali)** e **R-Q (numeri irrazionali)** sono contigui ma non separati.