Lezione 10 – **Calcolo dei limiti (1)**

Limiti di funzioni elementari

Utilizzando la definizione di limite si può provare che

- il limite per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ di una potenza intera positiva x^n è $+\infty$ o $-\infty$.
- il limite per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ di una potenza intera negativa $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $x \neq 0$ è 0.
- il limite per $x \to +\infty$ di una potenza x^α con $\alpha \in R_0$ è $+\infty$ se $\alpha>0$, 0 se $\alpha<0$. Poiché $x>0$ il limite per $x \to -\infty$ non esite.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ con $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ con $0 < a < 1$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ con $a > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ con $0 < a < 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln_a x = +\infty$ con $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln_a x = -\infty$ con $0 < a < 1$

  $\lim\limits_{x\to0^+} \ln_a x = -\infty$ con $a > 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} \ln_a x = +\infty$ con $0 < a < 1$

Algebra dei limiti

Un'osservazione fondamentale: la definizione di limite permette di verificare se un limite è vero o no, ma non permette di determinarlo, è quindi necessario dimostrare dei teoremi che, noti alcuni limiti consentano di calcolarne altri. Si ha così un insieme di regole che si possono usare nel calcolo dei limiti.
A volte si hanno **forme di indecisione** che si dicono indeterminate in quanto non possono essere calcolate applicando i teoremi. Tuttavia con opportuni raccoglimenti o altri strumenti è possibile eseguire il calcolo.

Teorema 10.2 (Programma base)
$f, g : X \to R,\ \ X \subseteq R,\ \ x_0 \in R$ punto di accumulazione per X, se esistono finiti i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m$$

allora vale

1) $\lim\limits_{x\to x_0} k\, f(x) = k\,l, \quad k \in R$
2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = l + m$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (kf + hg)(x) = kl + hm,\ k, h \in R$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$
4) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l}{m}$ se $m \neq 0$
5) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{l}$ se $l \neq 0$

Esempio 10.2

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\ln(x+2)}{x^2+x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \ln(x+2)}{\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} x^2+x+1} = \frac{\ln\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}(\ln 3 - \ln 2)$$

Teorema 10.3 (Programma base)

$f, g : X \to R,\ \ X \subseteq R,\ \ x_0 \in R$ punto di accumulazione per X, se

1) $\begin{matrix} f(x) \to +\infty & (-\infty) \\ g(x) \to +\infty & (-\infty) \end{matrix}$ per $x \to x_0$, allora $(f+g)(x) \to +\infty \quad (-\infty)$

2) $\begin{matrix} f(x) \to +\infty & (-\infty) \\ g(x) \to m & \end{matrix}$ per $x \to x_0$, allora $(f+g)(x) \to +\infty \quad (-\infty)$

Attenzione:

se $\begin{matrix} f(x) \to +\infty \\ g(x) \to -\infty \end{matrix}$ per $x \to x_0$, allora $(f+g)(x) \to ?$

se $\begin{matrix} f(x) \to +\infty \\ g(x) \to +\infty \end{matrix}$ per $x \to x_0$, allora $(f-g)(x) \to ?$

La forma $(+\infty - \infty)$ è una **forma di indecisione**.

Esempi 10.3

1) $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1) + \ln\frac{1}{x}$, calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \ln x = -\infty$ quindi il limite non è determinato in quanto si tratta di una forma di indecisione $(+\infty - \infty)$.

2) $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1) + \ln x = +\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 2x^2 - 1) = -\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty} (2x^3 + 2x^2 - 1)$ è una forma di indecisione; infatti $\lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$. Tuttavia si può calcolare tale limite raccogliendo la potenza x^3, $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

Osservazione

In generale il limite per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ di un polinomio è $+\infty$ o $-\infty$.

Teorema 10.4 (Programma base)

$f, g : X \to R,\ \ X \subseteq R,\ \ x_0 \in R$ punto di accumulazione per X, se

1) $\begin{matrix} f(x) \to +\infty\ (-\infty) \\ g(x) \to m > 0 \end{matrix}$ per $x \to x_0$, allora $(f \cdot g)(x) \to +\infty\ (-\infty)$

2) $\begin{matrix} f(x) \to +\infty\ (-\infty) \\ g(x) \to m < 0 \end{matrix}$ per $x \to x_0$, allora $(f \cdot g)(x) \to -\infty\ (+\infty)$

3) $\begin{matrix} f(x) \to \pm\infty \\ g(x) \to \pm\infty \end{matrix}$ per $x \to x_0$, allora $(f \cdot g)(x) \to \begin{matrix} +\infty & \text{se i limiti di } f \text{ e } g \text{ sono concordi} \\ -\infty & \text{se i limiti di } f \text{ e } g \text{ sono discordi} \end{matrix}$

Attenzione

se $\begin{matrix} f(x) \to 0 & \\ g(x) \to +\infty & (-\infty) \end{matrix}$ per $x \to x_0$, allora $(f \cdot g)(x) \to ?$

La forma $(0 \cdot \infty)$ è una **forma di indecisione**.

Esempi 10.4

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)\ln\frac{1}{x}$, calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\ln x=-\infty$ quindi $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)\ln\frac{1}{x}=-\infty$.

I seguenti limiti sono forme di indecisione nelle quali è però possibile determinare il limite grazie a qualche semplificazione.

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-1}=0^+$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

Teorema 10.5 (Programma base)

$f:X\to R,\ \ X\subseteq R,\ \ x_0\in R$ punto di accumulazione per X, se per $x\to x_0$,

1) $f(x)\to+\infty$ allora $\left(\frac{1}{f}\right)(x)\to 0^+$

2) $f(x)\to-\infty$ allora $\left(\frac{1}{f}\right)(x)\to 0^-$

3) $f(x)\to 0^+$ allora $\left(\frac{1}{f}\right)(x)\to+\infty$

4) $f(x)\to 0^-$ allora $\left(\frac{1}{f}\right)(x)\to-\infty$

Se abbiamo la divisione di due funzioni, possiamo scriverla $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$

Attenzione

se $\begin{matrix} f(x)\to 0 \\ g(x)\to 0\end{matrix}$ per $x\to x_0$, allora $\left(\frac{f}{g}\right)(x)\to ?$

se $\begin{matrix} f(x)\to+\infty & (-\infty) \\ g(x)\to+\infty & (-\infty)\end{matrix}$ per $x\to x_0$, allora $\left(\frac{f}{g}\right)(x)\to ?$

Le forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ e $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ sono **forme di indecisione** che equivalgono a quella del prodotto $(0\cdot\infty)$ o $(\infty\cdot 0)$.

Esempi 10.5

Per i limiti seguenti se usassimo la regola dei limiti per la divisione otterremmo le forma di indecisione $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, ma con semplici operazioni algebriche consentite dal fatto che nel limte si considera sempre $x\neq x_0$, a volte riusciamo comunque a calcolarli:

1) $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}$ è una forma di indecisione del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ che si risolve così:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}\left(x^2+1\right)(x+1)=\lim_{x\to1}\left(x^2+1\right)(x+1)=4$$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{3-x}-1}$ è una forma di indecisione del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ che si risolve così:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{3-x}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\left(\sqrt{3-x}-1\right)}\frac{\left(\sqrt{3-x}+1\right)}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}{(3-x)-1}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(-x+2)}\left(\sqrt{3-x}+1\right)=-2$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ è una forma di indecisione del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ che si dimostrerà più avanti avere limite 1!

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+1}$, calcoliamo $\lim_{x\to+\infty}x^2+1=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}x+1=+\infty$, è una forma di indecisione del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, che si risolve così:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$ poiché $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}=1$ si ottiene $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$.

5) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

6) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+x}{2x^3+x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=-\frac{3}{2}$$

Osservazione
In generale il **rapporto di due polinomi** per $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$ dipende dal loro grado, se il numeratore ha grado superiore a quello del denominatore il limite è $+\infty$ o $-\infty$ (Esempio 4), se il numeratore ha grado inferiore a quello del denominatore il limite è 0 (Esempio 5), se i due gradi sono uguali il limite è finito (Esempio 6).

Premessa
$f,g:X\to R,\ X\subseteq R$ se $\forall x\in X\quad f(x)\le g(x)$, allora si dice che $f(x)$ è minorante di $g(x)$ e $g(x)$ è maggiorante di $f(x)$.

Teorema 10.6 (Programma base)
$f,g:X\to R,\ X\subseteq R,\ x_0\in R$ è un punto di accumulazione di X, $f(x)$ è minorante di $g(x)$

1) se f e g sono convergenti per $x\to x_0$, allora $\lim_{x\to x_0}g(x)\ge\lim_{x\to x_0}f(x)$

2) se $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, allora $\lim_{x\to x_0}g(x)=+\infty$

3) se $\lim_{x\to x_0}g(x)=-\infty$, allora $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$

Esempio 10.6
$\{a_n\}=\{n\},\quad \lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$

Voglio calcolare $\lim_{n\to+\infty}n!$, dove $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ denota il fattoriale di n.

Osserviamo che $\forall n \;\; n \le n!$, perciò la successione a_n è minorante della funzione fattoriale, e perciò si avrà $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

Teorema 10.7 Teorema del confronto (Programma base)

Siano f, g, h delle funzioni definite in un insieme $X \in R$ e sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per *X*; se
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$
e si ha che $f(x) \le h(x) \le g(x)$ per ogni x nell'intorno di $x_0 : I(x_0)$ allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

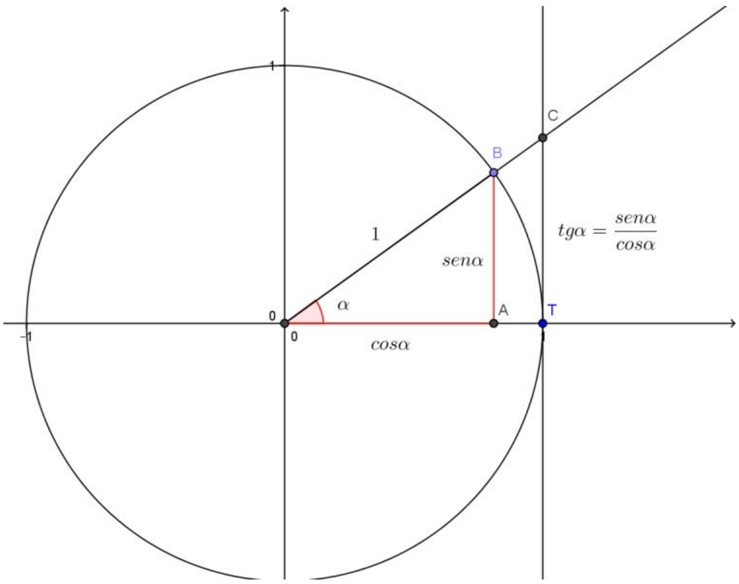
Esempio 10.7 (Programma avanzato)

Nell'esempio 3 di Esempi 10.5 si è osservato che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ è una forma di indecisione, applicando il teorema 10.7 è possibile determinarne il valore.

Innanzitutto si osserva che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è pari, poiché si ha

$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$, perciò si possono considerare solo i valori positivi della funzione.

Se esprimiamo la variabile *x* in radianti possiamo fare delle osservazioni di carattere geometrico o trigonometrico che ci aiutano a calcolare il limite.



Se l'angolo è misurato in radianti, α rappresenta la lunghezza dell'arco *TB*,
$AB = \sin\alpha, \;\; TC = \tan\alpha$
quindi
$\forall \alpha \text{ con } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \;\; AB < TB < TC$
quindi $\quad \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$

Passiamo ora a calcolare il nostro limite nella variabile *x*, poiché stiamo calcolando il limite $\frac{\sin x}{x}$ per $x \to 0^+$ possiamo considerare $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e da quanto detto prima si ha la disuguaglianza

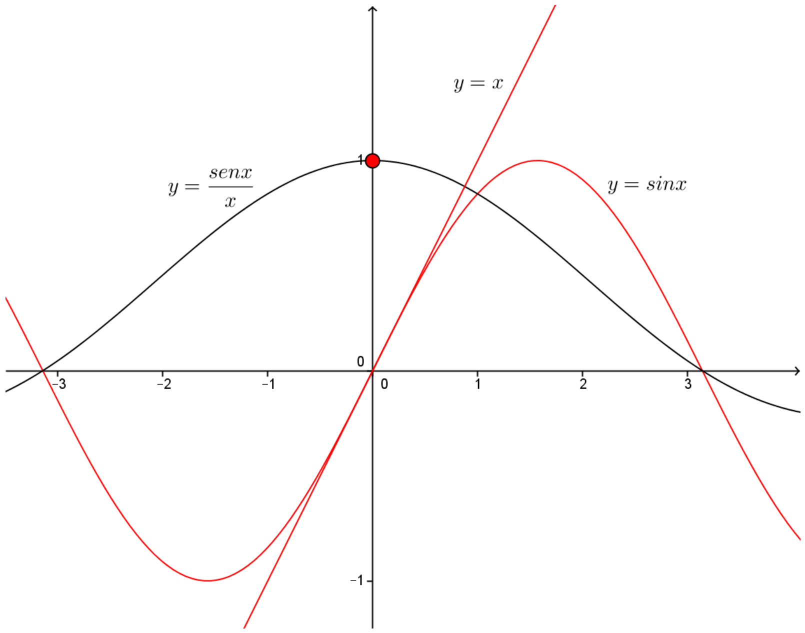
$$\sin x < x < \tan x$$

Dividendo tutti i termini per $\sin x > 0$ (si ricordi che $x > 0$) si ha

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Siano $f(x)=1,\ g(x)=\frac{1}{\cos x}$,
utilizzando il fatto che
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1,\quad \lim_{x\to 0^+} g(x)=1$ per il
teorema del confronto $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1$
quindi per la simmetria $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$.
Anche

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\sin x}}=\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=1$$



Osservazioni

1) Il fatto che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ fa pensare che "molto vicino" all'origine i grafici delle due funzioni $y=\sin x$ e $y=x$ siano "molto vicini" risultando tangenti per x=0, in questi casi si dice che le due funzioni hanno una relazione di asintotico per $x\to 0$.
Una conseguenza è che $y=x$ è l'equazione della retta tangente nell'origine al grafico di $y=\sin x$.

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ può essere usato per calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

Le funzioni $1-\cos x$ e x^2 sono in relazione di asintotico.

Teorema 10.8 (Programma base)
$f,g: X\to R,\ X\subseteq R,\ x_0\in R$ punto di accumulazione per X, se esistono finiti i limiti $\lim_{x\to x_0} f(x)=l>0,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=m$ allora vale $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=l^m$.

I casi di indecisione che si possono presentare sono

$$\infty^\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^\infty$$

Di solito in questi casi di indecisione si opera la trasformazione

$$f(x)^{g(x)}=a^{\log_a f(x)^{g(x)}}=a^{g(x)\log_a f(x)}$$

In questo modo si calcola, se esiste, il limite l del prodotto $g(x)\log_a f(x)$ e poi si calcola a^l.

Esempi 10.8

1) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$ si scrive $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$, calcolando il limite all'esponente si ottiene

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$ perciò $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{(-\infty)}=0^+$.

Teorema 10.9 (Programma base)

$f: X \to R,\ X \subseteq R,\ x_0 \in R$ punto di accumulazione per *X*, $fX \subseteq Y$ (fX è la frontiera di *X*)

$g: Y \to R$, sia $g \circ f: X \to R$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in R^*$, l punto di accumulazione per *Y*, e $\lim_{y \to l} g(y) = m \in R^*$, allora

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = m$$

Esempio 10.9

$\lim_{x \to 0^+} \log_2\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}\right)$, $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$, $g(y) = \log_2 y$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = \frac{1}{2} = l$, $\lim_{y \to l} \log_2 y = \lim_{y \to \frac{1}{2}} \log_2 y = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

Teorema 10.10 (Programma base)

Se $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$ e $g(x)$ è limitata inferiormente allora $(f + g)(x) \to +\infty$

Se $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$ e $g(x)$ è limitata superiormente allora $(f + g)(x) \to -\infty$

Se $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$ e $g(x)$ è limitata superiormente allora $(f - g)(x) \to +\infty$

Se $f(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$ e $g(x)$ è limitata inferiormente allora $(f - g)(x) \to -\infty$

Esempio 10.10

Vogliamo calcolare $\lim_{x \to +\infty} (\sin x + x)$, tuttavia il limite di $f(x) = \sin x$ per $x \to +\infty$ non esiste, si può però notare che questa funzione è limitata inferiormente, e poiché $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ anche $\lim_{x \to +\infty} (\sin x + x) = +\infty$.