Lezione 13 – **Concetto di derivata**

**13.1**

**1) Come varia una funzione nel tempo?**

Sia funzione *f*(*t*) con *t*∈[0,+∞) una funzione che descrive l’andamento di *f*  in funzione del tempo *t*.

Ci si chiede: “Come è possibile descrivere e quindi determinare l’andamento puntuale di *f* cioè come si può caratterizzare la “velocità istantanea” al tempo *t* = *t*0 fissato?”.

**2) Come varia una funzione costo in rapporto alla quantità prodotta?**

Nel caso della funzione costo ***S*=*S*(*q*)** non interessa solo quanto vale *S* per un determinato valore della quantità prodotta *q*0 , ma interessa il valore di (**variazione di *S*** )in rapporto ad una **variazione della quantità prodotta** .

**Definizione 13.1**

Sia , *I* intervallo aperto, sia  il rapporto fra gli incrementi detto **rapporto incrementale**:

se esiste  finito allora *f* si dice **derivabile in *x*0** e il limite *l* si dice **derivata di *f* in *x*0** indicata con uno dei seguenti simboli:



Se *f*  è derivabile per ogni  si dice **derivabile in *I*.**

**Esempi 13.1**

1. Sia , si vuole calcolarne la derivata per *x* = 1.
Si calcola il rapporto incrementale: .
Si calcola il limite  quindi *f*  è derivabile per *x* = 1 e .
In generale *f* è derivabile ; infatti  e quindi .
2. La funzione  è continua per ogni  e derivabile per ogni  non esiste.
3. La funzione  è continua e derivabile per ogni .

**Interpretazione geometrica della derivata**

Il **rapporto incrementale** è il coefficiente angolare della retta per i punti  e  ossia la **retta secante** il grafico di *f* nei punti A e B (in figura rossa tratteggiata).

Se esiste  finito tale limite è il coefficiente angolare di una retta che chiameremo **retta tangente al grafico di *f* nel punto A** (in figura rossa continua)**.**

****

**Esempi 13.2**

1. Sia , in questo caso il rapporto incrementale è 2, costante per qualunque valore di *x*; infatti la tangente in ogni punto del grafico di *f* è la retta di equazione *y*=2*x* il cui coefficiente angolare è 2, quindi .
2. Determinare l’equazione della retta tangente al grafico di  nel punto (1,2).
Poiché (vedi Es.13.1.1), il coefficiente della retta tangente è *m* = 4 quindi la sua equazione sarà: *y* = 4*x* + *q*. Imponendo alla retta di passare per il punto (1,2) si ottiene 2=4+*q* quindi *q* = -2.
In conclusione la retta tangente nel punto (1,2) ha equazione *y* = 4*x* -2.

****

**Definizione 13.2**

Sia , *I* intervallo aperto,

se esiste  finito allora *f* si dice **derivabile in *x*0** da destra

se esiste  finito allora *f* si dice **derivabile in *x*0** da sinistra

***f* è derivabile in *x*0** **se e solo se esistono  e  e coincidono**

**Esempi 13.2**

1. La funzione  è definita e continua per ogni  e derivabile per ogni infatti  ma  è diverso da  quindi *f*  non è derivabile per *x* = 0.
2. La funzione  è definita e continua per ogni  e derivabile per ogni ; infatti  e  esistono finiti ma sono diversi
 e  quindi *f*  non è derivabile per *x* = 1.

**Teorema 13.1**

Sia , se *f* è **derivabile in *x*0** allora *f* è **continua** per *x* = *x*0.

**Dimostrazione**

Se *f* è **derivabile in *x*0** alloraquindi  quindi *f* è continua in *x*0.

**Osservazione importante**

Il teorema fornisce una **condizione sufficiente** affinché una funzione sia continua, tale condizione però **non è necessaria**, possono esiste funzioni continue ma non derivabili. Tuttavia, in quanto condizione necessaria, la continuità può essere verificata per escludere la derivabilità.

**Esempio 13.3**

1.  è **derivabile** per ogni ; infatti è sicuramente derivabile per , inoltre si è dimostrato che è continua anche per  (vedi Es.12.5) quindi può essere derivabile anche per .
Per verificare la derivabilità per  si utilizza la definizione di derivata:
 poiché .

**Teorema 13.2** (Programma avanzato)

Sia , se *f* è **derivabile in *x*0** e **invertibile in** , **intorno di** *x*0, e allora la sua inversa *f* -1è **derivabile nel punto**  e  .

**Esempio 13.4**

 è **derivabile** per ogni  ed è anche invertibile  definita in *R*+0,  la sua derivata in un punto  è .

Se 

Se 

**Punti di non derivabilità**

Qualora una funzione sia continua in un punto *x*0ma non sia derivabile per il punto **(*x*0,*f*(*x*0))** si possono verificare diversi casi:

* **punto angoloso**: esistono le derivate destra e sinistra, di cui almeno una finita, e **sono diverse**

****

* **cuspide**: esistono le derivate destra e sinistra infinite e **sono diverse**

** cuspide verso il basso**

** cuspide verso l’alto**

* **punto a tangente verticale**: esistono le derivate destra e sinistra infinite e **sono uguali**, il tal caso nel punto si ha un cambio di concavità si dice *punto di flesso a tangente verticale*

** flesso ascendente**

** flesso discendente**

**Esempi 13.5**

1.  per *x*=0 è **continua** ma **non derivabile**, ****.
 Il punto (0,0) è punto angoloso.
2.  per *x*=0 è **continua** ma **non derivabile**, ****.
 Il punto (0,0) è cuspide.
3.  per *x*=0 è **continua** ma **non derivabile**, ****.
 Il punto (0,0) è punto di flesso ascendente.
4.  per *x*=0 è **continua** ma **non derivabile**, ****.
 Il punto (0,0) è punto di flesso discendente.
5.  è **derivabile** per ogni .
**Studiamo la continuità:**per ,  e per  *f* è continua;
per  si osserva che
  quindi *f* è continua
  quindi *f* ha una discontinuità di II° specie
per  si osserva che quindi  *f* ècontinua
  *f* ha una discontinuità di I° specie (non eliminabile).
**Studiamo la derivabilità**:
per ,  e *f* è derivabile;
per  si osserva  la funzione è  derivabile, in tutti gli altri casi non può esserlo in quanto non è continua.
per  si osserva che  *f* ècontinua solo  ossia e può essere derivabile, in tutti gli altri casi non può esserlo.
Verifichiamo se per esiste:


quindi  esiste, uguale a -1, solo  ossia 
**In conclusione:**• per , *f* è continua e derivabile per ogni valore *a* e *b*;
• per  *f* è continua e derivabile solo 
• per  *f* ècontinua solo  e derivabile solo.

**13.1 Applicazione**

**1)** Fissato un incremento *h*,si può considerare il **rapporto incrementale di *f* nel punto *t*0 relativo all’incremento *h* ,** tale rapporto descrive come varia *f* nell’intervallo di tempo *h* cioè è la **velocità media** in tale intervallo. Se la funzione *f* è continua per *t* = *t*0 è possibile calcolarne la derivata come limite del rapporto incrementale per  che quindi rappresenta la **velocità di istantanea**.

**2)** La variazione della funzione costo *S*(*q*)in rapporto all’incremento di quantità prodotta può essere considerato per incrementi discreti di *q* ossia oppure per *q* variabile continua ossia .

Nel ***caso discreto*** () il minimo incremento è se *h*=1 ossia  e il rapporto incrementale  coincide con la variazione  detto **costo marginale unitario** corrispondente al costo di un'unità aggiuntiva prodotta, cioè alla variazione nel costo che si verifica quando si varia di un'unità la quantità prodotta.
Nel ***caso continuo*** () si ha  detto **costo marginale**.

Si osservi che in ambito economico in entrami i casi si usa il termine costo marginale pur trattandosi in generale di due concetti diversi.

**Questioni chiuse**

1. Cosa rappresenta geometricamente il ?

 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di *f* nel punto (*t*0,*f* (*t*0)) ossia  dove *α* è l’angolo fra la retta tangente e il semiasse positivo delle *x*

1. Si è dato un nome al valore del ?

 è detto DERIVATA di *f* nel punto *t* = *t*0.

1. C’è una relazione fra l’esistenza del  e la continuità di *f*?

SI, se *f* non è continua per *t* = *t*0 la derivata non esiste.

**Questioni aperte**

Ci si chiede: in generale qual è il significato del segno di ?

In quali condizioni la derivata può essere utile per determinare monotonia ed estremi locali di una funzione?