Lezione 15 – **La funzione derivata** (Programma base)

15.1

1) Spazio-velocità

Sia funzione ***s*(*t*)** con $t\in[0,+\infty)$ una funzione che descrive come varia lo spazio percorso da un punto P in funzione del t.

Si è visto che la velocità al tempo $t = t_0$ è la derivata $s'(t_0)$, al variare di t è possibile considerare la funzione $v(t)=s'(t)$. Ci si chiede: "Quali sono le relazioni fra $s(t)$ e $v(t)$?".

2) Funzioni costo e costo marginale

Sia funzione ***S*=*S*(*q*)** con $q\in[0,+\infty)$ una funzione che descrive come varia il costo di produzione di un bene in funzione dellla quantità prodotta.

Si è visto che il costo marginale per una quantità prodotta $q = q_0$ è la derivata $S'(q_0)$, al variare di Q è possibile considerare la funzione $M(q)=S'(q)$. Ci si chiede: "Quali sono le relazioni fra $S(q)$ e $M(q)$?".

Teorema 15.1

Sia $f: X \to R$, $x_0 \in X$, sia $I(x_0)$ un intorno completo di x_0 se

1. f è continua in $I(x_0)$
2. f è derivabile in $I(x_0)$, $x \neq x_0$
3. $\exists$ finito $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$

allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

Osservazione

La condizione $\exists$ finito $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ è sufficiente affinché $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ ma non è condizione necessaria affinché il limite esista; infatti per esempio la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} \text{ se } x\neq 0 \\ 0 \text{ se } x=0\end{cases}$ è continua e derivabile per $x_0=0$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0} h\sin\dfrac{1}{h}=0$ ma la derivata è $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ non esiste.

Esempio 15.1

1) Scrivere la funzione derivata di $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-1} & \text{se } x<0, x\neq -1\\ e^{-x}+1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

Nell'Es.13.3.5 si è dimostrato che f è **derivabile** per ogni $x\in R\setminus\{-1\}$.

Per $x\neq -1$ la derivata di f è:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1-(x-2)2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2} & \text{se } x<0, x\neq -1\\ -e^{-x} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

Calcolando i limiti della derivata si conferma quanto già visto nell'Es.13.3.5 cioè

$f_-'(0) = f_+'(0) = -1$; infatti $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2} = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\lim_{x\to 0^+} e^{-x} = -1$.

Teorema 15.2
Sia $f: I \to R$, $x_0 \in I = (a,b) \subseteq R$, *I* intervallo aperto, se *f* è derivabile in *I*

$f'(x) \geq 0 \forall x \in I \Leftrightarrow f$ crescente in *I*;

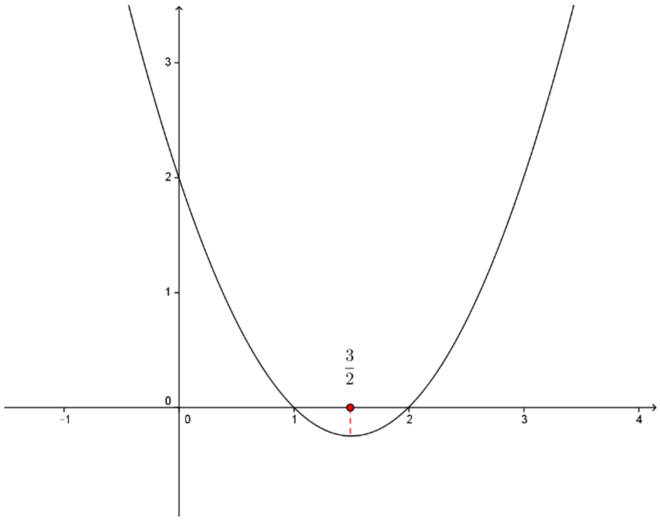
$f'(x) \leq 0 \forall x \in I \Leftrightarrow f$ decrescente in *I*;

$f'(x) > 0 \forall x \in I \Rightarrow f$ strettamente crescente in *I*;

$f'(x) < 0 \forall x \in I \Rightarrow f$ strettamente decrescente in *I*;

Esempio 15.2

$f(x) = x^2 - 3x + 2$



- $f'(x) = 2x - 3 > 0$ per $x > \frac{3}{2}$ quindi f è strettamente crescente;
- $f'(x) = 2x - 3 < 0$ per $x < \frac{3}{2}$ quindi f è strettamente decrescente.
- Per $x = \frac{3}{2}$ f ha un minimo pari a $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4} = -0.25$.

Si osserva che $x = \frac{3}{2}$ è il punto medio fra 1 e 2 (intersezione con l'asse x) e il punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ è il vertice della parabola.

Dimostrazione (Programma avanzato)
Se *f* derivabile in x_0 esiste $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f_+'(x_0) > 0$, per il teorema della **permanenza del segno** si deduce che esiste $I_h^+(x_0) = (x_0, x_0+h)$, intorno destro di x_0, tale che $\forall x \in I_h^+(x_0)$ sia $f(x) - f(x_0) > 0$ ossia $f(x) > f(x_0)$ quindi f strettamente crescente in x_0.
Analogamente si dimostrano i casi $f'(x_0) \geq 0$ $f'(x_0) < 0$ $f'(x_0) \leq 0$.

Osservazione importante
Il teorema afferma che la positività o negatività della derivata di *f* è condizione sufficiente per la stretta monotonia di *f*, tuttavia non è condizione necessaria; infatti, per esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente per ogni *x* reale tuttavia la derivata $f'(x) = 3x^2$ non è positiva nell'origine: $f'(0) = 0$!

Utilizzando il teorema precedente (15.2), in base al segno delle derivata prima in un intorno opportuno di x_0 , è possibile dedurre se un punto x_0 è di massimo o minimo relativo.
Il problema è determinare i punto da studiare ossia i "punti candidati" ad essere punti di massimo o di minimo relativo (estremanti). Il teorema di Fermat che segue è di importanza assoluta in quanto fornisce una **condizione necessaria (CN)** affinché un punto di derivabilità della funzione possa essere di massimo o minimo relativo, cioè permette di individuare i "punti candidati".

Attenzione: essendo una CN il teorema di Fermat non garantisce che i punti trovati siano estremanti.

Teorema 15.3 di Fermat

Sia $f: I \to R$, $x_0 \in I = (a,b) \subseteq R$, *I* intervallo aperto, *f* è derivabile in x_0

se x_0 è punto di massimo o minimo locale allora $f'(x_0) = 0$ e $\mathbf{x_0}$ si dice **punto stazionario per *f***

ossia

$f'(x_0) = 0$ è **condizione necessaria** affinché x_0 sia punto di massimo o minimo locale

Esempi 15.3

1) Continua Esempio 15.2

Come osservato $x_0 = \dfrac{3}{2}$ è un punto di minimo per $f(x) = x^2 - 3x + 2$, quindi $f'(x) = 2x - 3 = 0$ per $x = \dfrac{3}{2}$. In questo caso non possono esistere altri punti di minimo o massimo locale poiché la derivata si annulla solo per un valore di *x*.

2) Dal suo grafico si individua che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ ha in *x*=0 il massimo; *x*=0 è l'unica soluzione dell'equazione $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0$ quindi *f* non può avere altri punti di estremo.

3) La funzione $f(x) = \text{sen}\, x$ ha nei punti $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in R$ il valore massimo 1 e nei punti $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in R$ il valore minimo -1, tali punti si possono ottenere applicando il teorema di Fermat; infatti per tali valori $f'(x) = \cos x = 0$.

4) La funzione $f(x) = \cos x$ ha nei punti $x = 2k\pi, k \in R$ il valore massimo 1 e nei punti $x = (2k+1)\pi, k \in R$ il valore minimo -1, tali punti si possono ottenere applicando il teorema di Fermat; infatti per tali valori $f'(x) = \text{-sen}\, x = 0$.

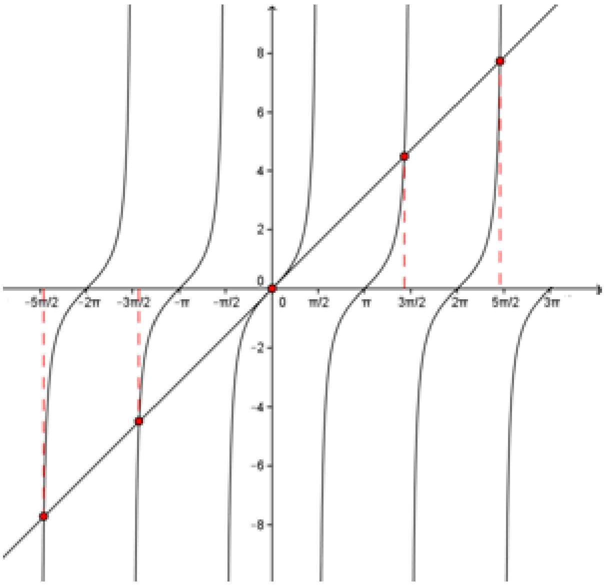
5) La funzione $f(x) = |x^3|$ ha in *x*=0 un minimo; per applicare il teorema di Fermat bisogna verificare che *f* è derivabile in *x*=0: $\lim\limits_{x \to 0^-} f_-'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-3x^2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f_+'(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2) = 0$ quindi *f* è derivabile per ogni *x*; $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ punto stazionario.

Il fatto che $x = 0$ sia punto di minimo si deduce dal fatto che $f(x) = |x^3| \geq 0 \ \forall x \in R$.

6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$ è **derivabile** per ogni $x\in R$,

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\text{sen}x}{x^2} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$ le soluzioni sono le ascisse dei punti stazionari corrispondenti alle intersezioni dei grafici $g(x)=x$ e $h(x)=\tan x$ come in figura.



Dimostrazione (Programma avanzato)

Se x_0 è punto di minimo locale allora esiste $I(x_0)$, intorno di x_0, tale che $\forall x\in I(x_0)$ sia $f(x)\geq f(x_0)$ quindi, scelto h tale che $x_0+h\in I(x_0)$ si hanno due casi:

- per $h>0$ $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$, per il teorema della **permanenza del segno** si deduce

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f_+'(x_0)\geq 0 \quad (1)$$

- per $h<0$ $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$, per il teorema della **permanenza del segno** si deduce

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f_-'(x_0)\leq 0 \quad (2)$$

Poiché f è derivabile in x_0, le derivate destra e sinistra sono uguali quindi, dovendo valere sia la (1) che la (2) si deduce che $f'(x_0)=0$.

Analogamente si dimostra il caso in cui x_0 è punto di massimo locale.

Importante: come detto precedentemente, una volta identificati i punti stazionari è necessario verificare se sono estremanti o meno utilizzando il segno della derivata prima in un opportuno intorno di ciscun punto stazionario; infatti la condizione $f'(x_0)=0$ è necessaria ma, in generale, non è sufficiente afficnhé un punto sia di massimo o minimo relativo..

Esempio 15.4

1) Problema: si vogliono determinare gli eventuali punti di minimo o massimo locale della funzione $f(x)=e^x-x$.

   Per restringere l'insieme dei "punti candidati" ad essere soluzione del problema si cercano i punti che verificano la condizione necessaria ossia quelli per cui vale $f'(x_0)=0$.

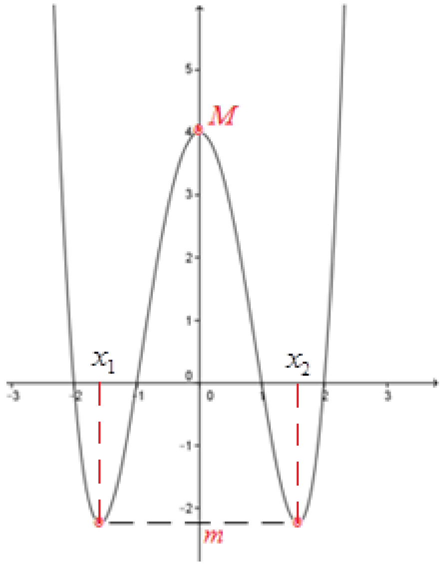
   $f'(x)=e^x-1$ quindi si risolve l'equazione $e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$.

   Il valore x=0 è l'unico per cui ci può essere un minimo o massimo locale.

   Per stabilire se effettivamente x=0 è soluzione del problema si applica il teorema 15.2 studiando il segno della derivata e si ottiene che

$f'(x) = e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (*f* strettamente crescente), $f'(x) = e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$ (*f* strettamente decrescente) quindi *x*=0 è punto di minimo, in questo caso globale.

2) Nell'esempio 5.5 si era arrivati a dire che la funzione $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ ha minimo assoluto *m*<0 assunto in due punti $x_1 \in (-2,-1)$ e $x_2 \in (1,2)$, non si era però in grado di determinarli in modo esatto, ora si può utilizzare il teorema 15.3!



$f'(x) = 2x(x^2 - 4) + (x^2 - 1)2x = 2x(2x^2 - 5)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}, x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$ "candidati" ad essere punti di minimo o di massimo.

Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene che

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{5}{2}} < x < 0 \vee x > \sqrt{\frac{5}{2}}$ quindi *f* è strettamente crescente;
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee 0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$ quindi *f* è strettamente decrescente;
- $x_0 = 0$ è quindi punto di massimo locale $M = f(0) = 4$,

  $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}, x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$ sono i due punti di minimo locale che risulta avere valore

  $m = f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} = -2.25$.

  Si osservi che effettivamente $-2 < -\sqrt{\frac{5}{2}} < -1, 1 < \sqrt{\frac{5}{2}} < 2$ come precedentemente trovato.

  Inoltre *m* è anche minimo globale o assoluto ma questo si determina dal codominio: $\operatorname{Im} f = [-2.25, +\infty)$.

3) La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ interseca gli assi nei punti (0,0) e (1,0) e

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} = \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 2x}{\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} = \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 2x}{x\sqrt[3]{x(x-1)^2}} = \frac{1}{3}\frac{3x - 2}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$$ definita per $x \neq 0,1$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Per determinare la natura di $x = \frac{2}{3}$, studiamo il segno di $f'(x)$:

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$ quindi *f* è strettamente crescente;
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{3}$ quindi *f* è strettamente decrescente;
- $x_1 = 0$ è punto di massimo locale ($M = f(0) = 0$) dove non è applicabile il teorema di Fermat.
- $x_2 = \frac{2}{3}$ è punto di minimo locale $m = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

Ancora sulla derivata: $\lim_{x \to 0^-} f_-'(x) = +\infty, \lim_{x \to 0^+} f_+'(x) = -\infty \to (0,0)$ cuspide

$$\lim_{x\to 1^-} f_-'(x)=+\infty, \lim_{x\to 1^+} f_+'(x)=+\infty \to (1,0) \text{ punto di flesso a tangente verticale.}$$

Il grafico è riportato nella lezione Riepilogo Es.19.5.

4) Continua Es.15.3 2) dove si è detto che x=0 massimo assoluto, quindi anche relativo, per $f(x)=e^{-x^2}$, studiando il segno di $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ si trova la conferma; infatti $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<0$ dove f è strettamente crescente; $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>0$ dove f è strettamente decrescente.

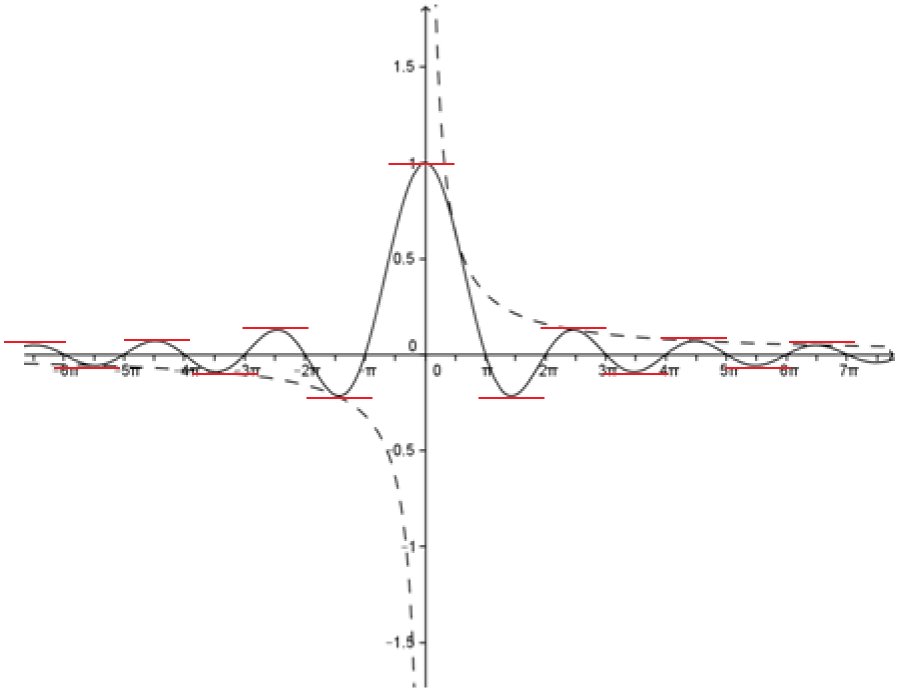
5) Continua Es.15.3 6) dove si è detto che i punti stazionari di

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$$

sono le soluzioni dell'equazione

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

corrispondenti alle intersezioni dei grafici $g(x)=x$ e $h(x)=\tan x$.



Tali punti sono alcuni di massimo relativo o locale, alcuni di minimo relativo o locale come si potrebbe dedurre dal segno di *f'*.

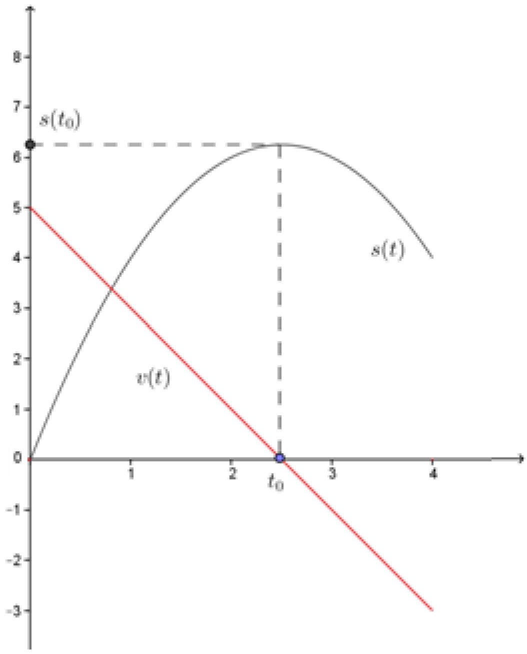
15.1 Applicazioni

1) Spazio-velocità

Ci si chiede: "Quali sono le relazioni fra $s(t)$ e $v(t)$?".

In base ai teoremi visti la funzione $s(t)$ è strettamente crescente se la funzione $v(t)=s'(t)>0$ e se al tempo t_0 si ha $v(t_0)=s'(t_0)=0$, t_0 è punto stazionario ossia tempo in cui il punto P si ferma, se per $t>t_0$ si ha $v(t)=s'(t)<0$ lo spazio si decrementa quindi il punto P torna indietro. In questo caso $s(t_0)$, posizione del punto in cui si è invertita la marcia, è massimo della funzione $s(t)$.

Per esempio, questi potrebbero essere i grafici di $s(t)$ (in nero) e $v(t)$ (in rosso) che rappresentano questa situazione nell'intervallo [0,4].



Se le due funzione che corrispondono al grafico fossero:

$$s(t)=-t^2+5t \;,\; v(t)=-2t+5$$

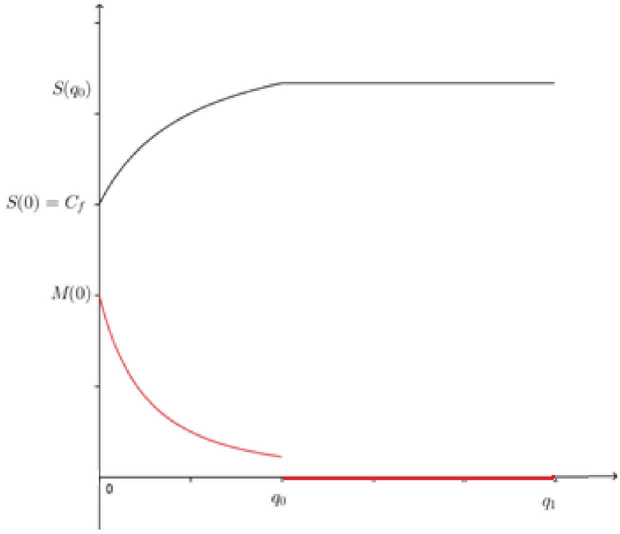
Il punto di massimo sarebbe $t_0=2.5$ e $s(t_0)=6.25$.

2) Funzioni costo e costo marginale

Ci si chiede: "Quali sono le relazioni fra $S(q)$ e $M(q)$?"

In base ai teoremi visti la funzione $S(q)$ è strettamente crescente se la funzione $M(q)=S'(q)>0$, si può pensare che per una certo intervallo di produzione i costi siano costanti quindi $S(q)$ crescente, mentre non è realistico pensare che $S(q)$ diventi strettamente decrescente.

Se per valori di q maggiori di una quantità q_0 il costo non cresce più ossia se per $q_0 < q < q_1$ si ha $M(q) = S'(q) = 0$ e il costo rimane costante nell'intervallo $[q_0, q_1]$ allora $S(q_0)$ è massimo del costo di produzione nell'intervallo $[0, q_1]$.Per esempio, questi potrebbero essere i grafici di $S(q)$ (in nero) e $M(q)$ (in rosso) che rappresentano questa situazione nell'intervallo $[0, q_1]$. Se le due funzione che corrispondono al grafico fossero:



$$S(q) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{q+1} + C_f & \text{se } 0 \le q \le q_0 \\ 1 - \dfrac{1}{q_0+1} + C_f & \text{se } q_0 \le q \le q_1 \end{cases}$$

$$M(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{(q+1)^2} > 0 & \text{se } 0 < q < q_0 \\ 0 & \text{se } q_0 < q < q_1 \end{cases}$$

I punti di massimo sono tutti i punti dell'intervallo $[q_0, q_1]$; infatti $M(q) = S'(q) = 0 \Leftrightarrow q_0 < q < q_1$.

Teorema 15.4 di Rolle

Sia $f : [a,b] \to R$, se

1. f è continua in $[a,b]$
2. f è derivabile in (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$ ossia la retta tangente al grafico nel punto (c,f(c)) è "orizzontale".

Esempio 15.5

1) Sia $f(x) = -(x-1)^2$ continua e derivabile per ogni $x \in R$.
Sia ha che $f(0) = f(2) = -1$ e il punto c che verifica il teorema di Rolle è c=1; infatti $f'(c) = -2(c-1) = 0 \Leftrightarrow c = 1 \in (0,2)$.

2) Sia $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$ continua e derivabile per ogni $x \in R$; infatti

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = 0 = f(1) \text{ e } \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 4x - 3 = 1,\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1.$$

Se si considera l'intervallo $[0,e]$ si ha $f(0) = f(e) = 1$ e il punto c che verifica il teorema di Rolle è $c = \dfrac{3}{4}$; infatti

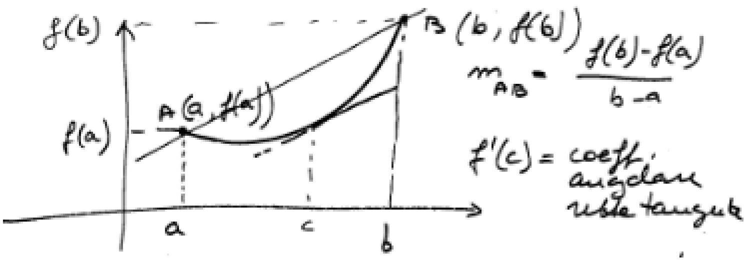
$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x < 1 \to f'(c) = 4c - 3 \Leftrightarrow c = \dfrac{3}{4} \in (0,e) \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Teorema 15.5 di Lagrange

Sia $f : [a,b] \to R$, se

1. f è continua in $[a,b]$
2. f è derivabile in (a,b)

allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$.



Osservazioni

- Dalla figura si evidenzia l'interpretazione geometrica del teorema di Lagrange: esiste un punto interno ad [*a*,*b*] dove la retta tangente al grafico è parallela alla secante per A e B.
- Il teorema di Rolle è un caso particolare del teorema di Lagrange in cui $f(a) = f(b)$, in tal caso infatti esiste almeno un punto interno ad [*a*,*b*] dove la retta tangente è "orizzontale".

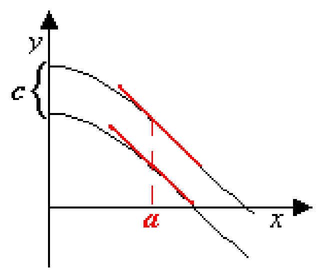
Esempio 15.6

1) Sia $f(x) = -(x-1)^2$ continua e derivabile per ogni $x \in R$.
Sia ha che $f(0) = -1, f(1) = 0$ e nell'intervallo [0,1] sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange; il punto *c* che verifica il teorema è $c = \frac{1}{2}$; infatti $\frac{f(1) - f(0)}{1-0} = 1$ e
$f'(c) = -2(c-1) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \in (0,1)$.

2) Sia $f(x) = \sqrt{4-x}$, si dica se è applicabile il teorema di Lagrange all'intervallo [-5,4] e determinare almeno un valore per cui $f'(c) = \frac{f(4) - f(-5)}{4-(-5)} = -\frac{1}{3}$.
f è continua per ogni $x \in [-5,4]$ ed è derivabile per ogni $x \in (-5,4)$ quindi esiste almeno un punto *c* che verifica il teorema di Rolle; infatti
$f'(c) = -\frac{1}{2\sqrt{4-c}} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{4-c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow c = \frac{7}{4} \in (-5,4)$.

Teorema 15.6
Due funzioni derivabili differiscono per una costante se e solo se le loro derivate coincidono.

Graficamente questa proprietà corrisponde al fatto che, date due funzioni *f*(*x*) e *g*(*x*) derivabili: *se* il grafico di *f*(*x*) è ottenuto traslando il grafico di *g*(*x*) di una costante *c* rispetto all'asse *y* *allora* le rette tangenti ai due grafici in punti aventi la stessa ascissa sono parallele e viceversa.



La dimostrazione del teorema si può effettuare considerando due teoremi:

Ipotesi: $f, g : A \subseteq R \rightarrow R$ derivabili in *A* aperto e *f*(*x*) = *g*(*x*) + *c* per ogni *x* appartenente ad *A* .

Tesi: $f'(x) = g'(x)$ per ogni x appartenente ad A.

Dimostrazione. Poiché la somma di due funzioni derivabili è derivabile e la sua derivata è la somma delle derivate delle due funzioni, la derivata di $g(x) + c$ è $g'(x)$ quindi $f'(x) = g'(x)$.

Ipotesi: $f, g : A \subseteq R \to R$ derivabili in A aperto e $f'(x) = g'(x)$ per ogni x appartenente ad A.

Tesi: $f(x) = g(x) + c$ per ogni x appartenente ad A.

Dimostrazione. $h(x) = f(x) - g(x)$ è derivabile e la sua derivata è $f'(x) - g'(x) = 0$ perché $f'(x) = g'(x)$.
Per il teorema di Lagrange, presi due punti x_1 e x_2 entrambe appartenenti ad A esiste un punto k appartenente ad A per cui $h(x_1) - h(x_2) = h'(k)(x_1 - x_2)$.
Poiché $h'(x) = 0$ per ogni x appartenente ad A allora $h(x_1) - h(x_2) = 0$ ossia $h(x_1) = h(x_2)$ comunque si scelgano x_1 e x_2 quindi $h(x)$ è costante in A cioè $f(x) - g(x) = c$.